- **DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT**.

1. Phương pháp giải.

Dựa vào đồ thị(bảng biến thiên) của hàm số $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ ta thấy nó đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $\left[\alpha;\beta\right]$ tại điểm $x = \alpha$ hoặc $x = \beta$ hoặc $x = -\dfrac{b}{2a}$. Cụ thể:

TH 1: $a > 0$

* Nếu $-\dfrac{b}{2a} \in \left[\alpha;\beta\right] \Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = f(-\dfrac{b}{2a});\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \max\ \ f(\alpha), f(\beta)$

* Nếu $-\dfrac{b}{2a} \notin \left[\alpha;\beta\right] \Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \min\ \ f(\alpha), f(\beta)\ \ ;\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \max\ \ f(\alpha), f(\beta)$

TH 2: $a < 0$: * Nếu $-\dfrac{b}{2a} \in \left[\alpha;\beta\right] \Rightarrow \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = f(-\dfrac{b}{2a});\ \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \min\ \ f(\alpha), f(\beta)$

* Nếu $-\dfrac{b}{2a} \notin \left[\alpha;\beta\right] \Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \min\ \ f(\alpha), f(\beta)\ \ ;\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x) = \max\ \ f(\alpha), f(\beta)$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 + 2\ \ m + 3\ \ x + m^2 - 3 = 0$, *m* là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $P = 5(x_1 + x_2) - 2x_1x_2$ giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $\Delta' = \ \ m + 3\ \ ^2 - \ \ m^2 - 3\ \ = 6m + 12$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2\ \ m + 3 \\ x_1x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

$P = -10\ \ m + 3\ \ - 2\ \ m^2 - 3\ \ = -2m^2 - 10m - 24$

Xét hàm số $y = -2x^2 - 10x - 24$ với $x \in \left[-2; +\infty\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\dfrac{5}{2}$ $\quad -2 \quad\quad\quad +\infty$
$y = -2x^2 - 10x - 24$	$-12 \searrow -\infty$

Suy ra $\max\limits_{\left[-2;+\infty\right.} y = -12$ khi và chỉ khi $x = -2$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm. $y =$

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} - 3\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+1},\, t\ge 1 \Rightarrow t^2=\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}$

Khi đó hàm số trở thành $y=t^2-3t+1$ với $t\ge 1$.

Bảng biến thiên

x	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$y=t^2-3t+1$	-1 ↘	$-\frac{5}{4}$ ↗	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt[3]{x^4+2x^2+1}-3\sqrt[3]{x^2+1}+1$ là $-\frac{5}{4}$ khi và chỉ khi $t=\frac{3}{2}$ hay

$\sqrt[3]{x^2+1}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{19}{8}}$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^4-4x^2-1$ trên $\left[-1;2\right]$.

Lời giải

Đặt $t=x^2$. Với $x\in\left[-1;2\right]$ ta có $t\in\left[0;4\right]$

Hàm số trở thành $f(t)=t^2-4t-1$ với $t\in\left[0;4\right]$

Bảng biến thiên

t	0	2	4
$y=t^2-3t+1$	-1 ↘	-1 ↗	-1

Suy ra $\max\limits_{[-1;2]} y=\max\limits_{[0;4]} f(t)=-1$ khi $\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

$\min\limits_{[-1;2]} y=\min\limits_{[-1;2]} f(t)=-1$ khi $t=2$ hay $x=\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 4: Cho các số thực $a,\, b$ thoả mãn $ab\ne 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+1$.

Lời giải

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. Ta có $\left|t\right|=\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right|=\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{a}\right|\ge 2\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|.\left|\frac{b}{a}\right|}=2$,

$t^2 = \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + 2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} = t^2 - 2$

Ta có $P = t^2 - 2 - t + 1 = t^2 - t - 1$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t - 1$ với $t \in \ -\infty;-2\big] \cup \big[2;+\infty\ $.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2	1	2		$+\infty$
$f(t) = t^2 - t - 1$	$+\infty$	$\searrow$	5		1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có

$\min P = \min\limits_{-\infty;-2]\cup[2;+\infty} f(t) = 1$ khi $t = 2$ hay $2 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 5: Cho các số x, y thoả mãn: $x^2 + y^2 = 1 + xy$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{9} \le x^4 + y^4 - x^2y^2 \le \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Đặt $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$

Ta có $P = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = \ 1 + xy\ ^{2} - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$

Đặt $t = xy$, khi đó $P = -2t^2 + 2t + 1$

Vì $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 2xy \\ x^2 + y^2 \ge -2xy \end{cases}$ nên $\begin{cases} 1 + xy \ge 2xy \\ 1 + xy \ge -2xy \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le xy \le 1$

Do đó $-\dfrac{1}{3} \le t \le 1$.

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + 2t + 1$ trên $\left[-\dfrac{1}{3};1\right]$

Ta có $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$, ta có bảng biến thiên

t	$-\dfrac{1}{3}$		$\dfrac{1}{2}$		1
$f(t) = -2t^2 + 2t + 1$	$\dfrac{1}{9}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\left[-\frac{1}{3};12\right]} f(t) = \dfrac{1}{9} \le P \le \max\limits_{\left[-\frac{1}{3};1\right]} f(t) = \dfrac{3}{2}$

Suy ra điều phải chứng minh.

3. Bài tập luyện tập

Bài 2.36: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $y = x^4 - 2x^2$ trên $\left[-2;1\right]$

b) $y = x^4 + 2x^3 - x$ trên $[-1;1]$.

Bài 2.37: Cho x, y là các số thực thoả mãn: $2(x^2 + y^2) = xy + 1$.

Chứng minh rằng : $\dfrac{18}{25} \le 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2 \le \dfrac{70}{33}$.

Bài 2.38: Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \quad 4x^2 + 3y \quad 4y^2 + 3x \quad + 25xy$.