

➤ **DẠNG TOÁN 4: ÚNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THÚC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT.**

1. Phương pháp giải.

Dựa vào đồ thị (bảng biến thiên) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ta thấy nó đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $[\alpha; \beta]$ tại điểm $x = \alpha$ hoặc $x = \beta$ hoặc $x = -\frac{b}{2a}$. Cụ thể:

TH 1: $a > 0$

* Nếu $-\frac{b}{2a} \in [\alpha; \beta] \Rightarrow \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = f(-\frac{b}{2a}); \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max f(\alpha), f(\beta)$

* Nếu $-\frac{b}{2a} \notin [\alpha; \beta] \Rightarrow \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \min f(\alpha), f(\beta); \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max f(\alpha), f(\beta)$

TH 2: $a < 0$: * Nếu $-\frac{b}{2a} \in [\alpha; \beta] \Rightarrow \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = f(-\frac{b}{2a}); \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \min f(\alpha), f(\beta)$

* Nếu $-\frac{b}{2a} \notin [\alpha; \beta] \Rightarrow \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \min f(\alpha), f(\beta); \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max f(\alpha), f(\beta)$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 + 2m + 3x + m^2 - 3 = 0$, m là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $P = 5(x_1 + x_2) - 2x_1x_2$ giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $\Delta' = (m+3)^2 - (m^2 - 3) = 6m + 12$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 6m + 12 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2$

Theo định lý Viết ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m - 3 \\ x_1x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

$$P = -10m + 3 - 2m^2 - 3 = -2m^2 - 10m - 24$$

Xét hàm số $y = -2x^2 - 10x - 24$ với $x \in [-2; +\infty)$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$
$y = -2x^2 - 10x - 24$	12		$-\infty$

Suy ra $\max_{[-2; +\infty)} y = -12$ khi và chỉ khi $x = -2$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm. $y =$

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} - 3\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1$

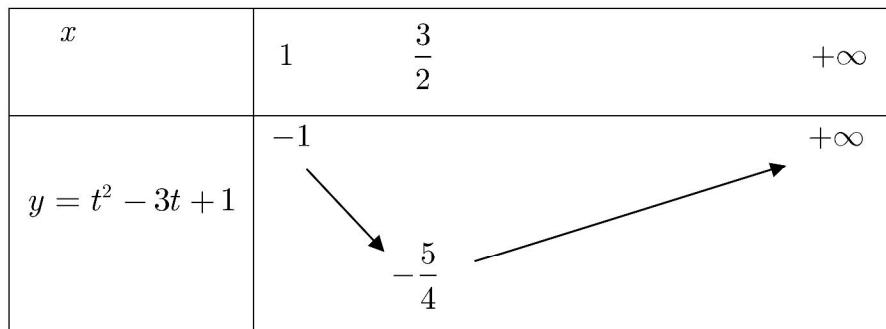
Group: <https://www.facebook.com/groups/tailieutieuhocvathcs/>

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{x^2 + 1}, t \geq 1 \Rightarrow t^2 = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Khi đó hàm số trở thành $y = t^2 - 3t + 1$ với $t \geq 1$.

Bảng biến thiên



Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} - 3\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1$ là $-\frac{5}{4}$ khi và chỉ khi $t = \frac{3}{2}$ hay

$$\sqrt[3]{x^2 + 1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{19}{8}}$$

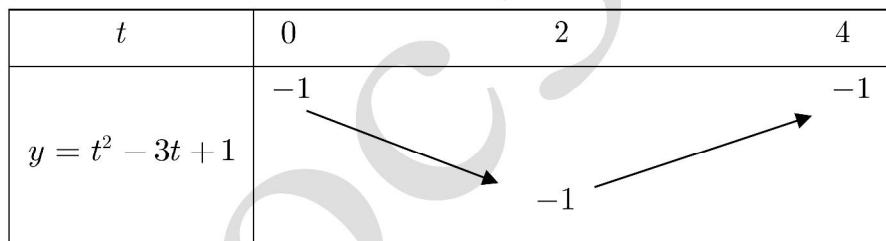
Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 1$ trên $[-1; 2]$.

Lời giải

Đặt $t = x^2$. Với $x \in [-1; 2]$ ta có $t \in [0; 4]$

Hàm số trở thành $f(t) = t^2 - 4t - 1$ với $t \in [0; 4]$

Bảng biến thiên



Suy ra $\max_{[-1; 2]} y = \max_{[0; 4]} f(t) = -1$ khi $\begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

$\min_{[-1; 2]} y = \min_{[0; 4]} f(t) = -1$ khi $t = 2$ hay $x = \pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 4: Cho các số thực a, b thoả mãn $ab \neq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 1.$$

Lời giải

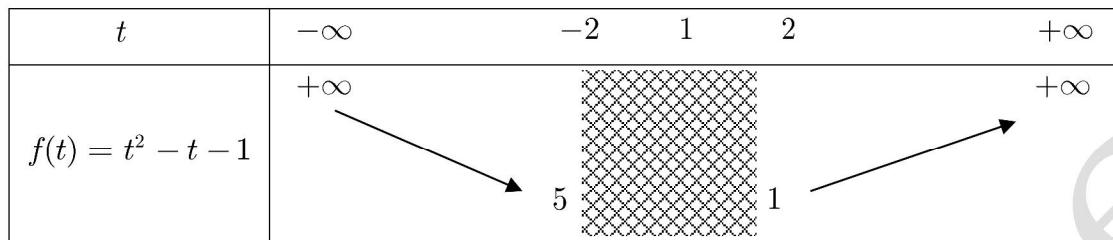
$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \text{ Ta có } |t| = \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| + \left| \frac{b}{a} \right| \geq 2\sqrt{\left| \frac{a}{b} \right| \cdot \left| \frac{b}{a} \right|} = 2,$$

$$t^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = t^2 - 2$$

Ta có $P = t^2 - 2 - t + 1 = t^2 - t - 1$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t - 1$ với $t \in [-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có

$$\min P = \min_{[-\infty; -2] \cup [2; +\infty)} f(t) = 1 \text{ khi } t = 2 \text{ hay } 2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = b.$$

Ví dụ 5: Cho các số x, y thoả mãn: $x^2 + y^2 = 1 + xy$.

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{1}{9} \leq x^4 + y^4 - x^2y^2 \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } P = x^4 + y^4 - x^2y^2$$

$$\text{Ta có } P = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = 1 + xy^2 - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$$

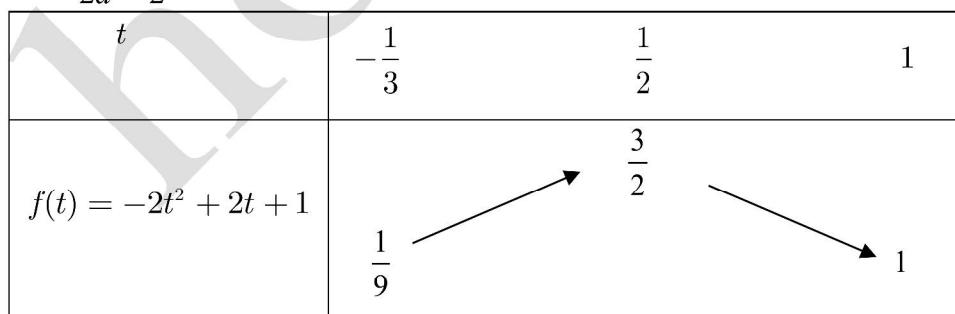
$$\text{Đặt } t = xy, \text{ khi đó } P = -2t^2 + 2t + 1$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ x^2 + y^2 \geq -2xy \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} 1 + xy \geq 2xy \\ 1 + xy \geq -2xy \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$$

$$\text{Do đó } -\frac{1}{3} \leq t \leq 1.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = -2t^2 + 2t + 1 \text{ trên } \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$$

$$\text{Ta có } -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}, \text{ ta có bảng biến thiên}$$



$$\text{Từ bảng biến thiên ta có } \min_{\left[-\frac{1}{3}; 1\right]} f(t) = \frac{1}{9} \leq P \leq \max_{\left[-\frac{1}{3}; 1\right]} f(t) = \frac{3}{2}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

3. Bài tập luyện tập

Bài 2.36: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $y = x^4 - 2x^2$ trên $[-2; 1]$

b) $y = x^4 + 2x^3 - x$ trên $[-1; 1]$.

Bài 2.37: Cho x, y là các số thực thoả mãn: $2(x^2 + y^2) = xy + 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{18}{25} \leq 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2 \leq \frac{70}{33}$.

Bài 2.38: Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thoả mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = 4x^2 + 3y - 4y^2 + 3x + 25xy$.