

DẠNG TOÁN 4 : TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC KHI BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.

1. Phương pháp giải.

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi$

d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$ mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Mà $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0$ suy ra $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Vì $\tan \alpha = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\text{Ta có } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{-2\sqrt{2}^2 + 1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{1}{3}$$

Vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0$ và $\tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0$ nên $\cos \alpha < 0$

Vì vậy $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) Vì $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ nên $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{1}{-\sqrt{2}^2 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0$ và $\cot \alpha = -\sqrt{2} < 0$ nên $\sin \alpha > 0$

Do đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 2: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

b) Cho $3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Lời giải

a) Ta có $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 24$ hay $\cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

Do đó $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$. Ta lại có $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

b) Ta có $3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \sin^4 \alpha - 1 - \sin^2 \alpha^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 6 \sin^4 \alpha - 2 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 \Leftrightarrow 4 \sin^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 1 - 2 \sin^2 \alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 1 = 0$ (Do $2 \sin^2 \alpha + 3 > 0$)

Suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

Ta lại có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Suy ra $A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Ví dụ 3: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

Lời giải

a) Ta có $A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$

Suy ra $A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$

b) $B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha \tan^2 \alpha + 1 - \tan^2 \alpha + 1}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha \tan^2 \alpha + 1}$

Suy ra $B = \frac{3 \cdot 9 + 1 - 9 + 1}{27 + 3 + 2 \cdot 3 \cdot 9 + 1} = \frac{2}{9}$

c) Ta có $C = \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)$
 $= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (1 - \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + \sqrt{5}^2} (1 - \sqrt{5} + 5) = \frac{6 - \sqrt{5}}{6}$

Ví dụ 4: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có $\sin x + \cos x^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x + \cos x = m$ nên $m^2 = 1 + 2\sin x \cos x$ hay $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có

$$A = |\sin^2 x + \cos^2 x \quad \sin^2 x - \cos^2 x| = |\sin x + \cos x \quad \sin x - \cos x|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2\sin x \cos x) (1 - 2\sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có $2\sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kết hợp với (*) suy ra

$$\sin x + \cos x^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } |m| \leq \sqrt{2}$$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 6.20: Tính các giá trị lượng giác còn lại, biết

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

b) $\cos \beta = \sqrt{\frac{1}{5}}$ với $0 < \alpha < \pi$

c) $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < 2\pi$

d) $\cos \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$

Bài 6.21: a) Cho $\cos a = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\cot a + 3 \tan a}{2 \cot a + \tan a}$

b) Cho $\sin a = \frac{1}{3}$. Tính $B = \frac{3 \cot a + 2 \tan a + 1}{\cot a + \tan a}$

c) Cho $\tan a = 2$. Tính $C = \frac{2 \sin a + 3 \cos a}{\sin a + \cos a}$;

d) Cho $\cot a = 5$. Tính $D = 2 \cos^2 a + 5 \sin a \cos a + 1$

Bài 6.22: Biết $\tan x + \cot x = m$.

- a) Tìm $\tan^2 x + \cot^2 x$ b) $\frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x}$ c) Chứng minh $|m| \geq 2$

Bài 6.23: Cho $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$. Tính $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

Bài 6.24: Cho $\tan a - \cot a = 3$. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $A = \tan^2 a + \cot^2 a$ b) $B = \tan a + \cot a$ c) $C = \tan^4 a - \cot^4 a$

Bài 6.25: Cho $3 \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính $A = \sin^4 x + 3 \cos^4 x$.