➢ DẠNG TOÁN 4: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ TỊNH TIẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Phương pháp giải.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D. Đồ thị hàm số f là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ nằm trong mặt phẳng tọa độ với $x \in D$.

Chú ý : Điểm $M(x_0; y_0) \in \ \ C\ \ $_đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

• Sử dụng định lý về tịnh tiến đồ thị một hàm số

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho hai hàm số $f\ \ x\ \ = 2x^2 + 3x + 1$ và $g\ \ x\ \ = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ khi } x > 2 \\ 2x - 1 \text{ khi } -2 \le x \le 2 \\ 6 - 5x \text{ khi } x < -2 \end{cases}$.

a) Tính các giá trị sau $f\ \ -1\ \ $ và $g\ \ -3\ \ , g\ \ 2\ \ , g\ \ 3\ \ $.

b) Tìm x khi $f\ \ x\ \ = 1$.

c) Tìm x khi $g\ \ x\ \ = 1$.

Lời giải

a) Ta có $f\ \ -1\ \ = 2\ \ -1\ \ ^2 + 3\ \ -1\ \ + 1 = 0$, $g(-3) = 6 - 5(-3) = 21$, $g(2) = 2.2 - 1 = 3$,

$g(3) = 3^2 + 1 = 10$

b) * Ta có $f\ \ x\ \ = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

* Với $x > 2$ ta có $g\ \ x\ \ = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x = 0 \end{cases}$ vô nghiệm

Với $-2 \le x \le 2$ ta có $g\ \ x\ \ = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Với $x < -2$ ta có $g\ \ x\ \ = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 6x - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x = 1 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy $g\ \ x\ \ = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = mx^3 - 2(m^2 + 1)x^2 + 2m^2 - m$

a) Tìm m để điểm $M(-1; 2)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho

b) Tìm các điểm cố định mà đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua với mọi m.

Lời giải

a) Điểm $M\left(-1;2\right)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi

$2=-m-2(m^2+1)+2m^2-m \Leftrightarrow m=-2$

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

b) Để $N\left(x;y\right)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua, điều kiện cần và đủ là

$y=mx^3-2(m^2+1)x^2+2m^2-m, \forall m$

$\Leftrightarrow 2m^2\left(1-x^2\right)+m\left(x^3-1\right)-2x^2-y=0,\ \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2=0\\x^3-1\\2x^2+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua điểm $N\left(1;-2\right)$.

Chú ý: Nếu đa thức $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ với mọi $x\in K$ khi và chỉ khi

$a_n=a_{n-1}=...=a_0$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng trên đồ thị C của hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ tồn tại hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thỏa mãn: $\begin{cases}2x_A+y_A=3\\2x_B+y_B=3\end{cases}$.

Lời giải

Ta có $A\in C \Leftrightarrow y_A=\dfrac{x_A^2-x_A+1}{x_A+1}$, $B\in C \Leftrightarrow y_B=\dfrac{x_B^2-x_B+1}{x_B+1}$

Do đó $\begin{cases}2x_A+y_A=3\\2x_B+y_B=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_A+\dfrac{x_A^2-x_A+1}{x_A+1}=3\\2x_B+\dfrac{x_B^2-x_B+1}{x_B+1}=3\end{cases}$ (*)

Với $x_A\neq -1,\ x_B\neq -1$ ta có

$(*)\Leftrightarrow \begin{cases}3x_A^2-2x_A-2=0\\3x_B^2-2x_B-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}\\x_B=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Suy ra tồn tại hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thuộc đồ thị $\left(C\right)$ thỏa mãn: $\begin{cases}2x_A+y_A=3\\2x_B+y_B=3\end{cases}$.

Ví dụ 4: Tìm trên đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2+3x-4$ hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Lời giải

Gọi M,N đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. $M\ \ x_0;y_0 \ \Rightarrow N\ -x_0;-y_0$

Vì M, N thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases}y_0=-x_0^3+x_0^2+3x_0-4\\-y_0=x_0^3+x_0^2-3x_0-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -x_0^3 + x_0^2 + 3x_0 - 4 \\ 2x_0^2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -x_0^3 + x_0^2 + 3x_0 - 4 \\ x_0 = \pm 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 2 \end{cases}$

Vậy hai điểm cần tìm có tọa độ là $(2;-2)$ và $(-2;2)$.

Ví dụ 5: a) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ liên tiếp sang phải hai đơn vị và xuống dưới một đơn vị ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Nêu cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -2x^2$ để được đồ thị hàm số $y = -2x^2 - 6x + 3$.

Lời giải

a) Ta tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^2 + 1$ sang trái hai đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = (x-2)^2 + 1$ rồi tịnh tiến lên trên một đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = (x-2)^2$ hay $y = x^2 - 4x + 4$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^2 + 4x + 6$.

b) Ta có $-2x^2 - 6x + 3 = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$

Do đó tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -2x^2$ để được đồ thị hàm số $y = -2x^2 - 6x + 3$ ta làm như sau

Tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số $y = -2x^2$ đi sang bên trái $\frac{3}{2}$ đơn vị và lên trên đi $\frac{15}{2}$ đơn vị.

3. Bài tập luyện tập:

Bài 2.12: Cho hàm số $y = f \quad x \quad = -3x^2 + m^2x + m + 1$(với m là tham số)

a) Tìm các giá trị của m để $f \quad 0 \quad = 5$.

b) Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = f \quad x$ đi qua điểm $A \quad 1;0$.

Bài 2.13: Tìm các điểm cố định mà đồ thị hàm số sau luôn đi qua với mọi m.

a) $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$

b) $y = \frac{(m-1)x + m + 2}{x + m + 2}$

Bài 2.14: Cho hàm số $f(x) = 2x^4 + (m-1)x^3 + (m^2-1)x^2 + 2(m^2 - 3m + 2)x - 3$.

Tìm m để điểm $M(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho

Bài 2.15: a) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ liên tiếp sang trái 2 đơn vị và xuống dưới $\frac{1}{2}$ đơn vị ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Nêu cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^3$ để được đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 6$.