- **DẠNG 4: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ.**

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những BĐT cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của BĐT cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra BĐT phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{a^3}\ge\dfrac{a+b+c}{abc}$

b) $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{1}{abc}$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$.

BĐT tương đương với $a^3+b^3-a^2b-b^2a\ge 0\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0$ (đúng với mọi $a>0, b>0$)

$\Rightarrow a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

a) Ta có $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a \Leftrightarrow \dfrac{a}{b^3}+\dfrac{1}{a^2}\ge\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{ab}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{1}{b^2}\ge\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{bc}, \dfrac{c}{a^3}+\dfrac{1}{c^2}\ge\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ac}$

Cộng vế với vế rút gọn ta được $\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{a^3}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

Hay $\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{a^3}\ge\dfrac{a+b+c}{abc}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Theo bài toán trên ta có : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$

$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Rightarrow\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}\le\dfrac{1}{ab(a+b+c)}=\dfrac{c}{abc(a+b+c)}$

Tương tự : $\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}\le\dfrac{a}{abc(a+b+c)}$; $\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\le\dfrac{b}{abc(a+b+c)}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho a, b là các số thực. Chứng minh rằng:

a) $3(a+b+1)^2+1\ge 3ab$.

b) $64a^3b^3(a^2+b^2)^2\le\ a+b\ ^6$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ nên ta chứng minh $3(a+b+1)^2+1\ge\dfrac{3}{4}(a+b)^2$ (*)

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow 12(a+b)^2+24(a+b)+16\ge 3(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 9(a+b)^2+24(a+b)+16\ge 0\Leftrightarrow(3a+3b+4)^2\ge 0$ (đúng) ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=-\dfrac{2}{3}$.

b) Dễ thấy bất đẳng thức đúng khi $ab \le 0$.

Xét $ab > 0$. Áp dụng BĐT $ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ ta có

$$64a^3b^3(a^2+b^2)^2 = 16ab\left[2ab(a^2+b^2)\right]^2 \le 16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left[\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}\right]^2 = (a+b)^6$$

Suy ra $64a^3b^3(a^2+b^2)^2 \le (a+b)^6$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 3: Cho a là số dương và b là số thực thỏa mãn $a^2+b^2=5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{2a^3+a+1}{a^2}-2b$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac+bd)^2$ (*), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Ta có $(a^2+b^2)(1+4)=25 \ge (a+2b)^2 \Leftrightarrow a+2b \le 5$

Suy ra $-2b \ge a-5$

Do đó $P=\dfrac{2a^3+a+1}{a^2}-2b \ge \dfrac{2a^3+a+1}{a^2}+a-5=3a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}-5$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a+\dfrac{1}{a}\ge 2,\ a+a+\dfrac{1}{a^2}\ge 3$

Do đó $3a+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}\ge 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy sa $P \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=1,\ b=2$.

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow a=1,\ b=2$.

Nhận xét: Bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức Bunhiacopxki cho bốn số. Ta có thể tổng quát bất đẳng thức Cho $2n$ số $a_1,a_2,..,a_n,b_1,b_2,...,b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2).$$

Ví dụ 4: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}\ge 3$

b) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ này hai lần ta có :

$$a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \ge$$
$$\ge ab.bc+bc.ca+ca.ab=abc(a+b+c)=3abc \text{ (vì } a+b+c=3\text{)}$$

Suy ra $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{abc}\ge 3$ hay $\dfrac{a^3}{bc}+\dfrac{b^3}{ca}+\dfrac{c^3}{ab}\ge 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

b) Áp dụng $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ ta có $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2} \ge \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{3}{abc}$

Do đó ta cần chứng minh $\dfrac{3}{abc} \ge a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow abc\ \ a^2+b^2+c^2\ \ \le 3$(*)

Lại áp dụng $\ a+b+c\ ^2 \ge 3\ \ ab+bc+ca$ (ví dụ 1) ta có

$$ab+bc+ca\ ^2 \ge 3abc\ \ a+b+c\ \ \Rightarrow abc \le \frac{ab+bc+ca\ ^2}{9}\ (**)$$

Áp dụng bất đẳng thức $abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$ và (**) ta có

$$abc\ \ a^2+b^2+c^2\ \ \le \frac{ab+bc+ca\ ^2\ \ a^2+b^2+c^2}{9} \le \frac{1}{9}\left(\frac{a+b+c\ ^2}{3}\right)^3=3$$

Vậy BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM..
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{1}{2a+b+c}+\dfrac{1}{2a+2b+c}+\dfrac{1}{a+b+2c} \le \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})$

b) $\dfrac{1}{a+3b}+\dfrac{1}{b+3c}+\dfrac{1}{c+3a} \ge \dfrac{1}{2a+b+c}+\dfrac{1}{a+2b+c}+\dfrac{1}{a+b+2c}$

lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực không âm ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a+b \ge 2\sqrt{ab} \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}} \end{array}\right\} \Rightarrow (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4$$

Suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ (*). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

a) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{(a+b)+(a+c)} \le \frac{1}{4}(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}) \le \frac{1}{16}(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Tương tự ta có $\dfrac{1}{a+2b+c} \le \dfrac{1}{16}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c})$; $\dfrac{1}{a+b+2c} \le \dfrac{1}{16}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c})$

Cộng ba BĐT trên ta có được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+b+2c} \ge \frac{4}{2a+4b+2c}=\frac{2}{a+2b+c}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{2a+b+c} \ge \frac{2}{a+b+2c};\ \ \frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c} \ge \frac{2}{2a+b+c}$$

Cộng ba BĐT trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}\le\dfrac{3}{4}$.

b) $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge 30$

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có :

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc} \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 3\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{array}\right\}\Rightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 3\sqrt[3]{abc}.3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=9$$

Suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$ (*) . Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

a) Ta có BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{a+1-1}{a+1}+\dfrac{b+1-1}{b+1}+\dfrac{c+1-1}{c+1}\le\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 3-(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1})\le\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}\ge\dfrac{9}{4}$.

Áp dụng BĐT (*) ta có $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}\ge\dfrac{9}{a+b+c+3}=\dfrac{9}{4}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

b) Áp dụng BĐT (*) ta có : $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge\dfrac{9}{ab+bc+ca}$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

Mặt khác : $ab+bc+ca\le\dfrac{1}{3}(a+b+c)^2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{7}{ab+bc+ca}\ge 21$

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=9$$

Suy ra : $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}\ge 9+21=30$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Ví dụ 7: Cho a,b,c là các số thuộc $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $\dfrac{1}{4a^4+5}+\dfrac{2}{4b^4+5}+\dfrac{3}{4c^4+5}=\dfrac{6}{7}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=ab^2c^3$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau

Với x,y thuộc $[0,1]$, ta luôn có $\dfrac{1}{4x^4+5}+\dfrac{1}{4y^4+5}\le\dfrac{2}{4x^2y^2+5}$ (*)

Thật vậy, BĐT (*)

$\Leftrightarrow\ 2x^4+2y^4+5\quad 4x^2y^2+5\ \le\ 4x^4+5\quad 4y^4+5$

$\Leftrightarrow 8x^4y^4-10x^2y^2+\ \ x^4+y^4\quad 5-4x^2y^2\ \ \ge 0$

$\Leftrightarrow (5-4x^2y^2)(x^2-y^2)^2\ge 0$ (đúng với $x,y\in[0,1]$)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Áp dụng BĐT (*) ta có: $\dfrac{1}{4a^4+5}+\dfrac{1}{4c^4+5}\le\dfrac{2}{4a^2c^2+5}, \dfrac{1}{4b^4+5}+\dfrac{1}{4c^4+5}\le\dfrac{2}{4b^2c^2+5}$

Suy ra $\dfrac{1}{4a^4+5}+\dfrac{1}{4b^4+5}+\dfrac{2}{4c^4+5}\le\dfrac{2}{4a^2c^2+5}+\dfrac{2}{4b^2c^2+5}\le\dfrac{4}{4abc^2+5}$ (1)

Và $\dfrac{1}{4b^4+5}+\dfrac{1}{7}\le\dfrac{2}{4.\dfrac{b^2}{\sqrt{2}}+5}, \dfrac{1}{c^4+5}+\dfrac{1}{7}\le\dfrac{2}{4.\dfrac{c^2}{\sqrt{2}}+5}$

Suy ra $\dfrac{1}{4b^4+5}+\dfrac{1}{4c^4+5}+\dfrac{2}{7}\le\dfrac{2}{4.\dfrac{b^2}{\sqrt{2}}+5}+\dfrac{2}{4.\dfrac{c^2}{\sqrt{2}}+5}\le\dfrac{4}{4.\dfrac{bc}{\sqrt{2}}+5}$ (2)

Ta lại có $\dfrac{4}{4abc^2+5}+\dfrac{4}{4.\dfrac{bc}{\sqrt{2}}+5}\le\dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\dfrac{1}{4a^4+5}+\dfrac{2}{4b^4+5}+\dfrac{3}{4c^4+5}+\dfrac{2}{7}\le\dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}$

Kết hợp giả thiết suy ra $\dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}\ge\dfrac{8}{7}\Rightarrow ab^2c^3\le\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$

Vậy $\max P=\dfrac{1}{16}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.50: Cho *a, b, x, y* $\in R$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ (1)

Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) Cho a, b ≥ 0 thoả $a+b=1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\ge\sqrt{5}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{a^2}}$.

c) Cho x, y, z > 0 thoả mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}.$$

d) Cho x, y, z > 0 thoả mãn $x+y+z=\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{223 + x^2} + \sqrt{223 + y^2} + \sqrt{223 + z^2}.$$

Bài 4.51: Cho a, b dương. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (1).

Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$; với a, b, c > 0.

b) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 2\left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c}\right)$; với a, b, c > 0.

c) Cho a, b, c > 0 thoả $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Chứng minh: $\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq 1$

d) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$; với a, b, c > 0.

e) Cho x, y, z dương thoả mãn $x + 2y + 4z = 12$. Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4xz}{4z+x} \leq 6$.

f) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Bài 4.52: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (1).

Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$ với a, b, c dương

b) $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} \leq \frac{3}{4}$. Với a, b, c dương thoả $a + b + c = 1$.

c) $\frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ac} + \frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$. Với a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c \leq 1$

d) $\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2009}{ab+bc+ca} \geq 670$. Với a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$

Bài 4.53: Cho $a, b, c \geq 0$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ac} \leq 1.$$

Bài 4.54: Cho ba số thực không âm $a,\ b,\ c$ và không có hai số đồng thời bằng không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 4\sqrt{2}.\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$