Bài toán 03: TÍNH ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG.

Phương pháp:

Để tính độ dài của một đoạn thẳng theo phương pháp vec tơ ta sử dụng cơ sở $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Vì vậy để tính độ dài của đoạn MN ta thực hiện theo các bước sau:

- Chọn ba vec tơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ so cho độ dài của chúng có thể tính được và góc giữa chúng có thể tính được.
- Phân tích $\overrightarrow{MN} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$
- Khi đó $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\overrightarrow{MN}^2} = \sqrt{\left(m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}\right)^2}$

$$= \sqrt{m^2|\vec{a}|^2 + n^2|\vec{b}|^2 + p^2|\vec{c}|^2 + 2mn\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 2np\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right) + 2mp\cos\left(\vec{c},\vec{a}\right)}.$$

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và các góc $BAA' = BAD = DAA' = 60^0$. Tính độ dài đường chéo AC'.

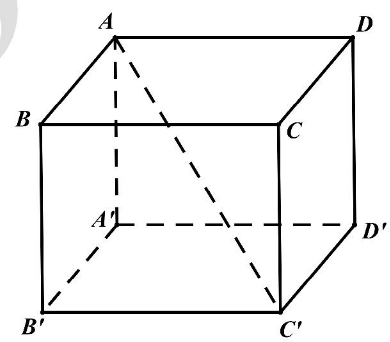
Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ thì

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a, \left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\vec{c},\vec{a}\right) = 60^0$.

Ta có $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a}$



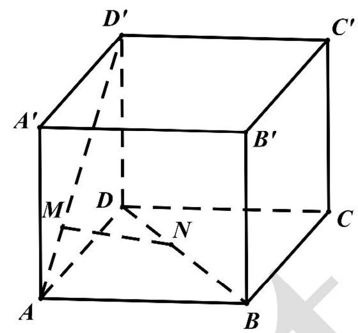
$= 3a^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^0 + 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^0 + 2|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^0 = 6a^2 \Rightarrow AC' = a\sqrt{6}$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông canh a. Lấy M thuộc đoạn $A'D$, N thuộc đoạn BD với $AM = DN = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$. Tính MN theo a và x.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$

hoc360.net



Ta có $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=a,\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a}\right)=90^0$

$\overrightarrow{DN}=\dfrac{DN}{DB}.\overrightarrow{DB}=\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{AM}{AD'}.\overrightarrow{AD'}=\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)=\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

Suy ra

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}+\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

$=\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a}+\left(1-\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{b}-\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}$.

$MN^2=\left(\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\vec{a}+\left(1-\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\right)\vec{b}-\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\vec{c}\right)^2=\dfrac{x^2}{2a^2}\vec{a}^2+\left(1-\dfrac{x}{a\sqrt{2}}\right)^2\vec{b}^2+\dfrac{x^2}{2a^2}\vec{c}^2$

$=x^2+\left(1-\dfrac{\sqrt{2}x}{a}+\dfrac{x^2}{2a^2}\right)a^2=\dfrac{3x^2}{2}-\sqrt{2}ax+a^2$

$MN=\sqrt{\dfrac{3x^2}{2}-\sqrt{2}ax+a^2}$.