IV. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN.

1. Phương pháp giải.

Ta thường chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tâm của đường tròn là gốc tọa độ hoặc nằm trên các các trục tọa độ.

2. Các ví dụ.

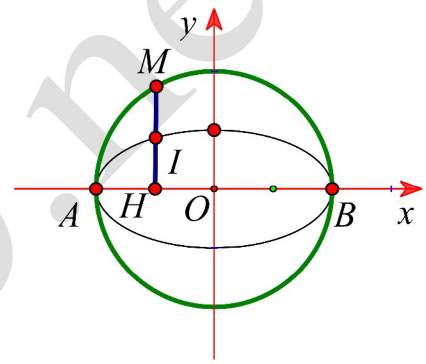
Ví dụ 1: Cho đường tròn (C) có đường kính AB không đổi, một điểm M di động trên (C). Gọi H là hình chiếu của M trên AB. Tìm tập hợp trung điểm I của MH.

Lời giải (hình 3.21)

Chọn hệ trục toạ độ Oxy với $A, B \in Ox$ và đối xứng qua Oy

Ta có bán kính đường tròn (C) là $R = \dfrac{AB}{2}$

suy ra (C) có phương trình là $x^2 + y^2 = R^2$.



Hình 3.21

Giải sử $I\ \ x;y$ suy ra $H\ \ x;0$

I là trung điểm MH nên

$$\begin{cases} x_M = 2x_I - x_H = x \\ y_M = 2y_I - y_H = 2y \end{cases} \Rightarrow M\ \ x;2y$$

Mặt khác $M \in\ \ C$ suy ra

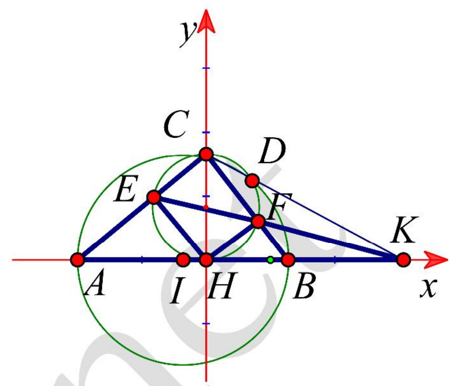
$$x^2 +\ \ 2y\ ^2 = R^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{4}} = 1$$

Chứng tỏ tập hợp I là elip (E) : $\dfrac{x^2}{R^2} + \dfrac{y^2}{\frac{R^2}{4}} = 1$.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (C) đường kính AB. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C) sao cho tam giác ABC không cân tại C. Gọi H là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ C. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AC, BC. Đường thẳng EF cắt AB tại K . Gọi D là giao điểm (C) và đường tròn (C') đường kính $CH \quad D \neq C$.

Chứng minh rằng K, D, C thẳng hàng.

Lời giải (hình 3.22)



Hình 3.22

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho

$H \equiv O, C \in Oy, A \in Ox, B \in Ox$

Không mất tính tổng quát giả sử $AB = 2t$.

Gọi I là trung điểm AB và giả sử

$I \quad a;0 \quad , -t < a < t, a \neq 0; C \quad 0;b \quad .$

Suy ra $A \quad -t + a;0 \quad , B \quad t + a;0$

Vì tam giác ACB vuông tại C có đường cao AH nên $CH^2 = AH.BH \Rightarrow b^2 = t^2 - a^2$ (*)

Ta có $C \quad : \quad x - a \quad ^2 + y^2 = t^2, \quad C' \quad : x^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$

C, D là hai giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') nên tọa độ của nó là nghiệm của phương trình:

$$x - a \quad ^2 + y^2 - x^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = t^2 - \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow 2ax - by + t^2 - a^2 = 0$$

Do đó $CD : 2ax - by + t^2 - a^2 = 0$

Phương trình đường thẳng AC là $AC : \frac{x}{-t + a} + \frac{y}{b} = 1$ hay

$bx + \quad a - t \quad y - ab + tb = 0,$

Đường thẳng HE nhận $\overrightarrow{AC} \quad t - a; b$ làm VTPT nên có phương trình là

$HE : \quad t - a \quad x + by = 0$

Tọa độ của E là nghiệm của hệ tạo bởi phương trình đường thẳng AC và EH

Suy ra $E\left(\frac{b^2(a-t)}{b^2+(a-t)^2};\frac{b(a-t)^2}{b^2+(a-t)^2}\right)$ kết hợp (*) suy ra

$E\left(-\frac{b^2}{2t};\frac{b(t-a)}{2t}\right)$

Tương tự ta có $AC:\frac{x}{t+a}+\frac{y}{b}=1\Leftrightarrow bx+(t+a)y-b(t+a)=0$ và

$HF:-(t+a)x+by=0$

Suy ra tọa độ điểm H là $H\left(\frac{b^2(a+t)}{b^2+(a+t)^2};\frac{b(a+t)^2}{b^2+(a+t)^2}\right)$ kết hợp (*) suy ra

$H\left(\frac{b^2}{2t};\frac{b(t+a)}{2t}\right)$

Do đó đường thẳng EH có phương trình là $\frac{x+\frac{b^2}{2t}}{b}=\frac{y-\frac{b(t-a)}{2t}}{a}$ hay

$2ax-2by+b^2=0$

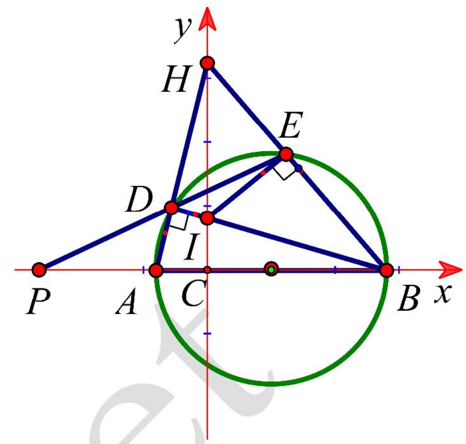
Cho $y=0\Rightarrow x=-\frac{b^2}{2a}$ do đó $K\left(-\frac{b^2}{2a};0\right)$

Thay tọa độ K vào phương trình đường thẳng DC ta được

$2a.\left(-\frac{b^2}{2a}\right)+t^2-a^2=0\Leftrightarrow b^2=t^2-a^2$ (đúng do (*))

Vậy điểm K thuộc đường thẳng CD hay ba điểm $K,\ D,\ C$ thẳng hàng đpcm.

Ví dụ 3: Cho đường trường tròn (C) đường kính AB, đường thẳng Δ vuông góc với AB tại C cố định. H là điểm thay đổi trên Δ . Giả sử AH và BH cắt đường tròn tại D và E. Chứng minh rằng DE luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 3.23

Lời giải (hình 3.23)

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho

$C \equiv O, A \in Ox,\ B \in Oy,\ \Delta \equiv Oy$

Không mất tính tổng quát giả sử $A\left(a;0\right)$, $B\left(b;0\right)$

Suy ra $\left(C\right): \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{b-a}{4}\right)^2$ (1) ,

giả sử $H\left(0;m\right)$, $m \neq 0$ và m thay đổi. Gọi I là giao của BD và Δ.

Ta có $\overrightarrow{AH} = \left(-a;m\right)$ làm VTPT của đường thẳng BD nên

$BD: -a\left(x-b\right) + my = 0 \Leftrightarrow -ax + my + ab = 0$ Cho

$x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{a^2}{m} \Rightarrow I\left(0;-\dfrac{ab}{m}\right)$

Suy ra đường tròn đường kính HI là $x^2 + \left(y - \dfrac{m^2-ab}{2m}\right)^2 = \left(\dfrac{m^2+ab}{2m}\right)^2$

(2)

D, E là giao của hai đường tròn (C) và đường tròn đường kính HI nên tọa độ thỏa mãn phương trình (1) và (2) do đó nó thỏa mãn phương trình

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 - x^2 - \left(y - \frac{m^2-ab}{2m}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{4}\right)^2 - \left(\frac{m^2+ab}{2m}\right)^2$$

Hay $-\left(a+b\right)x + \dfrac{m^2-ab}{m}y + 2ab = 0$ và đây chính là đường thẳng DE.

Suy ra DE đi qua điểm cố định là $P\left(\dfrac{2ab}{a+b};0\right)$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.166: Cho đoạn $AB = a, a > 0$ cố định. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 = \dfrac{5a^2}{2}$. Hãy nêu và giải bài toán tổng quát dạng này.

Bài 3.167. Cho hai điểm A, B và một số thực dương k. Tìm tập hợp điểm M trong mặt phẳng sao cho $MA = kMB$.

Bài 3.168: Cho A, B cố định. Tìm tập hợp điểm M thoả mãn

$\left| MAB - MBA \right| = 90^0$.

Bài 3.169: Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B. Xét điểm C thay đổi trên nửa mặt phẳng bờ AB. Dựng ra ngoài của tam giác ABC các hình vuông $ACED$ và $BCFG$. Chứng minh rằng đường thẳng DG luôn đi qua một điểm cố định khi C thay đổi.

Bài 3.170: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn trong các trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \quad = 0$

c) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 0$

Bài 3.171: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm HD. Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

Bài 3.172: Cho tam giác đều ABC. M là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác. Gọi D, E, F là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng $P = MA^2 + MB^2 + MC^2 - 2 \quad MD^2 + ME^2 + MF^2$ không phụ thuộc vào điểm M.

Bài 3.173. Cho tam giác ABC, đường tròn đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D. Gọi F, H là hình chiếu của D và E trên BC. Gọi M là giao điểm của EF và DG. Chứng minh rằng AM vuông góc với BC.

Bài 3.174. Cho tam giác ABC đều , gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa đường thẳng Δ bất kỳ với đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng

$16 \quad \cos^2\alpha.\cos^2\beta.\cos^2\gamma + \sin^2\alpha.\sin^2\beta.\sin^2\gamma \quad = 1$

Bài 3.175. Cho tam giác ABC không cân có hai đỉnh B và C cố định và đỉnh A di động. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt trung tuyến AI của tam giác ABC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng nếu IH song song với KC thì điểm A di động trên một đường cố định.

Bài 3.176.(VMO 2007) Cho tam giác ABC có 2 đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi. Gọi H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm A biết trung điểm K của HG nằm trên đường thẳng BC

Bài 3.177: Cho tam giác ABC có đường cao AD. Lấy hai điểm E, F thuộc đường thẳng Δ đi qua D và khác D sao cho $AE \perp BE, AF \perp CF$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, EF. Chứng minh rằng $AN \perp MN$.

Bài 3.178: Cho tam giác ABC cân tại A. Các điểm D, E di động với D là điểm nằm trên cạnh AB và điểm E trên cạnh BC sao cho hình chiếu của DE trên BC có độ dài bằng nửa đoạn BC. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với DE tại E luôn đi qua điểm cố định.

Bài 3.179: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh BC và N là chân đường phân giác của góc BAC. Đường thẳng vuông góc với NA cắt các đường thẳng AB, AM lần lượt tại P, Q. Gọi I là giao điểm đường vuông góc với AB tại P và AN. Chứng minh rằng $IQ \perp BC$

Bài 3.180: Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong mặt phẳng sao cho khoảng cách từ M đến BC bằng trung bình nhân khoảng cách từ M đến AB và AC.

Bài 3.181: Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao $AB = h$, cạnh đáy $AD = a, BC = b$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h sao cho:

a) $CID = 90^\circ$ với I là trung điểm của AB

b) BD vuông góc với CI

c) AC vuông góc với DI

d) Trung tuyến BM của ΔABC vuông góc với trung tuyến CN của tam giác BCD.

Bài 3.182: Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R, S là hình chiếu của M trên các đoạn thẳng AD, AB, BC, CD. Chứng minh rằng $PQ \perp RS$.

Bài 3.183. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Các điểm E, F thuộc cạnh CD sao cho $DE = EF = FC$. Các điểm G, H thuộc cạnh BC sao cho $BG = GH = HC$. Đường thẳng AE cắt DG tại M, đường thẳng AF cắt DH lần lượt tại N. Chứng minh rằng MN song song với CD.

Bài 3.184: Cho hình vuông $ABCD$. Từ A kẻ một đường thẳng bất kỳ cắt BC, DC tương ứng tại E và F. Gọi I là trung điểm của BE.

a) Chứng minh rằng FI tiếp xúc với đường tròn nội tiếp hình vuông
b) Giả sử DE cắt FI tại M. Chứng minh rằng M nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông.

Bài 3.185. Cho góc vuông xOy. Một hình chữ nhật $OABC$ có chu vi không đổi với A, C là các điểm thay đổi thuộc Ox, Oy. Chứng minh rằng đường vuông góc kẻ từ B vuông góc với đường chéo AC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 3.186. Cho đường tròn tâm O bán kính bằng a. Có hai đường kính vuông góc với nhau là AB và CD. M, N lần lượt là các điểm di động trên đoạn OD, OC sao cho $CN = OM$. Đường thẳng AM cắt đường tròn lần nữa tại P.

Với vị trí nào của điểm M, N thì $ANP = 90^0$

Bài 3.187: Cho đường thẳng Δ không cắt đường tròn $C\ \ I;R$. M, N là hai điểm di động nằm trên đường thẳng Δ sao cho đường tròn đường kính MN luôn tiếp xúc ngoài với đường tròn $C\ \ I;R$. Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm A sao cho từ đó nhìn đoạn thẳng MN dưới một góc vuông.

Bài 3.188: Cho A, B, C, D là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng, theo thứ tự đó. Đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại X và Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là điểm nằm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N. Chứng minh các đường thẳng AM, DN cắt nhau tại một điểm thuộc đường thẳng XY.

Bài 3.189: Cho điểm A nằm trên đường tròn (C) tâm I và gọi Δ là tiếp tuyến tại A của đường tròn (C). Gọi M sao cho khoảng cách từ M tới Δ bằng độ dài tiếp tuyến MT kẻ tới đường tròn (C) với T là tiếp điểm.
a) Tìm tập hợp điểm M
b) Chứng minh đường tròn tâm M, bán kính MT luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 3.190. Cho tam giác ABC có phân giác trong và ngoài tại đỉnh C cắt cạnh AB lần lượt tại D và E. Biết rằng $CD = CE$. Chứng minh $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.