c) Ứng dụng trong chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng với mọi số thực x ta luôn có

$\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+5}\geq\sqrt{13}$

Lời giải

Đặt $\vec{u}\ \ x+1;1\ \ ,\vec{v}\ \ 1-x;2$

Khu đó ta có $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{13}$ và

$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|=\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+5}$

Vì $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$ nên $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+5}\geq\sqrt{13}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $2\ \ x+1\ \ =1-x\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

Ví dụ 7: Cho hai số thực $x,\ y$ với $y>-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{y^4}{2}-4y+5}+\sqrt{\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{y^4}{2}+8y^2-4x-12y+9}}{y+1}$

Lời giải

Ta có $\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{1}{2}\geq x^2,\dfrac{y^4}{2}+\dfrac{1}{2}\geq y^2$

$$\Rightarrow S\geq\frac{\sqrt{x^2+y^2-4y+4}+\sqrt{x^2+9y^2-4x-12y+8}}{y+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+\ \ y-2\ \ ^2}+\sqrt{\ \ x-2\ \ ^2+\ \ 3y-2\ \ ^2}}{y+1}$$

Lấy $\vec{u}=\ \ x;y-2\ \ ,\vec{v}=\ \ 2-x;2-3y$ thì

$$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|=\sqrt{x^2+\ \ y-2\ \ ^2}+\sqrt{\ \ 2-x\ \ ^2+\ \ 2-3y\ \ ^2}$$

$$\geq\sqrt{\ \ x+2-x\ \ ^2+\ \ y-2+2-3y\ \ ^2}=4\sqrt{y^2+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxki ta có

$4\sqrt{y^2+1}\geq2\sqrt{2}\ \ y+1$ suy ra $S\geq2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Vậy $\min S = 2\sqrt{2}$

Ví dụ 8: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$ và $c + d = 4$.

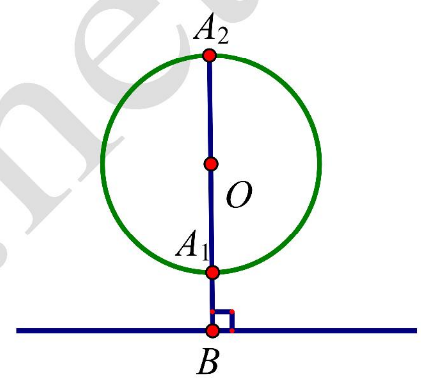
Chứng minh rằng: $ac + cd + db \le 4 + 4\sqrt{2}$

Lời giải (hình 3.26)

Ta có $ac + cd + db \le 4 + 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \ge a^2 + b^2 + (c+d)^2 - 8 - 8\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 \ge 12 - 8\sqrt{2}$



Hình 3.26

Trong hệ trục tọa độ Oxy xét $M(a;b)$, $N(c;d)$ khi đó M, N lần lượt nằm trên đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$ và đường thẳng $\Delta : x + y = 4$.

Khi đó $MN^2 = (a-c)^2 + (b-d)^2$.

Ta có (C) có tâm O bán kính $R = 2$ và không cắt Δ

Đường thẳng d đi qua O và vuông góc với Δ có phương trình là $d : x - y = 0$.

Tọa độ giao điểm B của đường thẳng Δ và d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2;2)$$

Tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và đường tròn (C) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \sqrt{2} \\ x = y = -\sqrt{2} \end{array}\right.$

Suy ra đường thẳng d cắt đường tròn (C) tại hai điểm $A_1(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $A_2(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Do đó $A_1B = \sqrt{2(2-\sqrt{2})^2} < A_2B = \sqrt{2(2+\sqrt{2})^2}$

Ta có $MN \ge \min\{A_1B; A_2B\} \Rightarrow MN^2 \ge A_1B^2 = 12 - 8\sqrt{2}$

hoc360.net

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv A_1$ hay $a = b = \sqrt{2}$ và $N \equiv B$ hay $c = d = 2$ đpcm.

Ví dụ 9: Cho x, y là hai số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{3x^2 + 3(y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y+3)^2}$$

Lời giải

Ta có

$$P = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y+3)^2}$$

Xét hệ trục tọa độ Oxy. Gọi $A(0;1)$, $B(-1;0)$, $C(\sqrt{3};-3)$ và $M(x;y)$

khi đó $P = \sqrt{3}MA + MB + 2MC$

Dễ thấy $BOC = 120^0, COA = 150^0, AOB = 90^0$

Đặt $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{1}{2}.\frac{\overrightarrow{OB}}{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}}{OC}$

Ta có

$$\vec{u}.\overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2}.OA + \frac{1}{2}.OA.\cos 90^0 + OA.\cos 150^0 = OA\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 150^0\right) = 0$$

$$\vec{u}.\overrightarrow{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.OB.\cos 90^0 + \frac{1}{2}.OB + OB.\cos 120^0 = OB\left(\frac{1}{2} + \cos 120^0\right) = 0$$

Suy ra $\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{1}{2}.\frac{\overrightarrow{OB}}{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}}{OC} = \vec{0}$

Ta có

$$P = \sqrt{3}\frac{MA.OA}{OA} + \frac{MB.OB}{OB} + 2\frac{MC.OC}{OC} \geq \sqrt{3}\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{OB}}{OB} + 2\frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{OC}}{OC}$$

Mặt khác $\sqrt{3}\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{OB}}{OB} + 2\frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{OC}}{OC}$

$$= \overrightarrow{MO}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\overrightarrow{OA}}{OA} + \frac{1}{2}.\frac{\overrightarrow{OB}}{OB} + \frac{\overrightarrow{OC}}{OC}\right) + \sqrt{3}.OA + OB + 2OC$$

$$= \sqrt{3}.OA + OB + 2OC = \sqrt{3} + 1 + 2.\sqrt{3+9} = 5\sqrt{3} + 1$$

Suy ra $P \geq 1 + 5\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi $M \equiv O$ hay $x = y = 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $1+5\sqrt{3}$.

hoc360.net