Bài toán 03: SỬ DỤNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

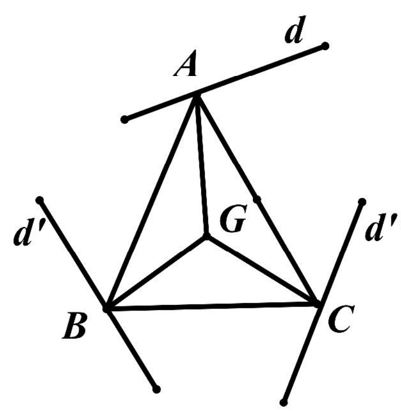
Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó.

Để tìm tập hợp điểm M' ta đi tìm tập hợp điểm M mà $Q_{(I;\alpha)}$ nào đó biến điểm M thành điểm M', khi đó nếu $M \in (H)$ thì $M' \in (H') = Q_{(I;\alpha)}((H))$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường thẳng d và một điểm G không nằm trên d. Với mỗi điểm A nằm trên d ta dựng tam giác đều ABC có tâm G. Tìm quỹ tích các điểm B,C khi A di động trên d.

Lời giải.



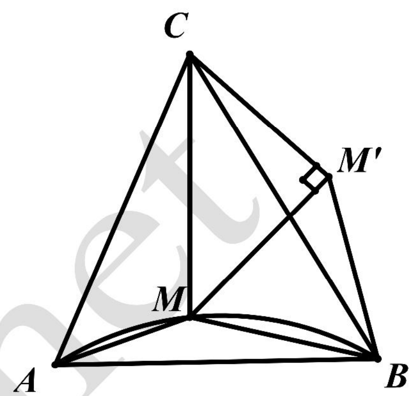
Do tam giác ABC đều và có tâm G nên phép quay tâm G góc quay 120^0 biến A thành B hoặc C và phép quay tâm G góc quay 240^0 biến A thành B hoặc C. Mà $A \in d$ nên B,C thuộc các đường thẳng là ảnh của d trong hai phép quay nói trên.

Vậy quỹ tích các điểm B,C là các đường thẳng ảnh của d trong hai phép quay tâm G góc quay 120^0 và 240^0.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC. Tìm tập hợp điểm M mằn trong tam giác ABC sao cho $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Lời giải.

Xét phép quay $Q_{(B;-60^0)}$ thì A biến thành C, giả sử điểm M biến thành M', khi đó $MA = M'C, MB = MM'$ nên $MA^2 + MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow M'C^2 + MM'^2 = MC^2$ do đó tam giác $M'MC$ vuông tại M' suy ra $BM'C = 150^0$.



Lại có $AM = CM'$, $BM = BM'$ và $AB = BC \Rightarrow \Delta AMB = \Delta CM'B \ (c-c-c)$

$\Rightarrow AMB = CM'B = 150^0$. Vậy M thuộc cung chứa góc 150^0 với dây cung AB nằm trong tam giác ABC.

Đảo lại lấy điểm M thuộc cung $AB = 150^0$ trong tam giác ABC, gọi $M' = Q_{(B;-60^0)}(M)$.

Do $Q_{(B;-60^0)} : AMB \to CM'B$ nên $CM'B = 150^0$. Mặt khác tam giác BMM' đều nên $BM'M = 60^0 \Rightarrow CM'M = 150^0 - 60^0 = 90^0$ vì vậy $\Delta M'MC$ vuông tại $M' \Rightarrow M'B^2 + M'C^2 = MC^2$, mà $MA = M'C, MB = MM' \Rightarrow MA^2 + MB^2 = MC^2$.

Vậy tập hợp điểm M thỏa yêu cầu bài toán là cung $AB = 150^0$ trong tam giác ABC nhận AB làm dây cung.