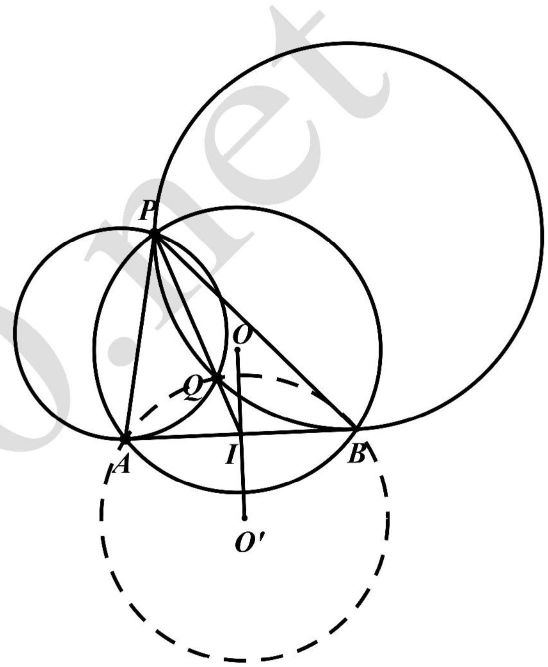
Bài toán 03: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN QUỸ TÍCH.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn (O) và dây cung AB cố định, P là một điểm thay đổi trên (O). Gọi (C) và (C') là hai đường tròn qua P lần lượt tiếp xúc với AB tại A và B. Tìm quỹ tích giao điểm thứ hai của hai đường tròn này.

Lời giải.



Gọi Q là giao điểm thứ hai của (C) và (C'), và I là giao điểm của PQ với AB, khi đó ta có $\overline{IQ}.\overline{IP} = IA^2 = P_{I/(C)}$

$\overline{IQ}.\overline{IP} = IB^2 = P_{I/(C')}$

$\Rightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow IA = IB \Rightarrow I$ là trung điểm của AB.

Xét phép nghịch đảo cực I, phương tích $k = IA^2$ ta có $f_I^k : Q \mapsto P$, mà $P \in (O)$ nên quỹ tích điểm Q là ảnh của (O) qua f_I^k. Vì $I \notin (O)$ nên ảnh của (O) là đường tròn.

Vì $f_I^{IA^2} = V_{\left(I, \frac{IA^2}{P_{I/(O)}}\right)} = V_{\left(I, \frac{IA^2}{-IA^2}\right)} = V_{(I,-1)}$, do phép vị tự tâm I, tỉ số -1 chính là phép đối xứng tâm I, do đó ảnh của (O) là đường tròn (O') ảnh của (O) trong phép đối xứng tâm I.

Ví dụ 2. Ch đường tròn (O) và điểm S nằm ngoài đường tròn (O).Hai cát tuyến lưu động qua S lần lượt cắt (O) tại A, A' và B, B'. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB' và SBA'. Tìm quỹ tích điểm M.

Lời giải.

Xét phép nghịch đảo cực S, phương tích $k = P_{S/(O)}$, khi đó ta có:

$f_S^k:(O)\mapsto(O)$ (theo tính chất 3b).

Lại có $\overline{SA}.\overline{SA'}=P_{S/(O)}=\overline{SB}.\overline{SB'}$ nên $A\to A', B\mapsto B'$ do đó $(SAB')\mapsto A'B$ và $(SBA')\mapsto B'A$. Do đó giao điểm M của hai đường tròn (SAB') và $(SA'B)$ biến thành điểm $M'=AB'\cap A'B$. Vẽ tiếp tuyến ST của (O), gọi H là giao điểm của SO với đường thẳng Δ đi qua T vuông góc với SO. Theo VD 2, ta có $M'\in\Delta$.

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn đường kính SO (đường tròn nghịch đảo), đây là ảnh của Δ qua phép nghịch đảo trên.