

Bài toán 03: DÙNG PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TẬP HỢP ĐIỂM.

Phương pháp:

Sử dụng tính chất : Nếu $N = \mathcal{D}_d(M)$ với M di động trên hình (H) thì N di động trên hình (H') - ảnh của hình (H) qua phép đối xứng trục d .

Các ví dụ

Ví dụ 1. Trên đường tròn (O, R) cho hai điểm cố định A, B . Đường tròn $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài với (O) tại A . Một điểm M di động trên (O) . MA cắt (O') tại điểm thứ hai A' . Qua A' kẻ đường thẳng song song với AB cắt MB tại B' .

Tìm quỹ tích điểm B'

Lời giải.

Gọi $C = A'B' \cap (O')$. Vẽ tiếp tuyến chung của (O) và (O') tại điểm A

. Ta có $A'CA = xAM$

$= ABM = BB'A'$ do đó

$ABB'C$ là hình thang

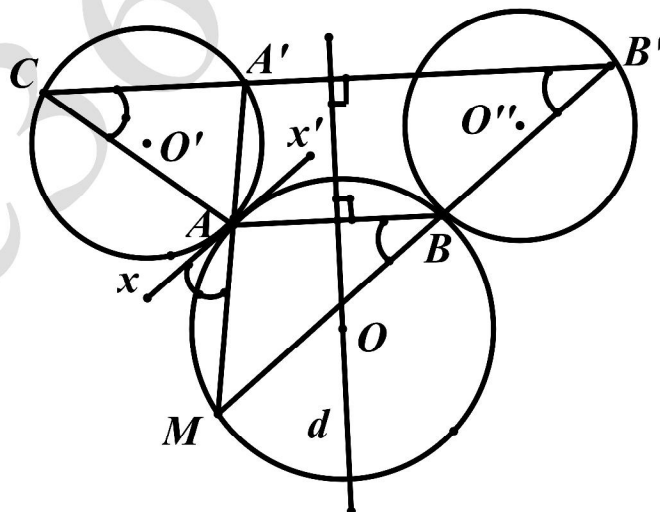
cân. Gọi d là trục đối

xứng của hình thang này

thì $\mathcal{D}_d(C) = B'$ mà C di

động trên đường tròn

(O') nên B' di động trên đường tròn (O'') ảnh của (O') qua \mathcal{D}_d .



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp I , P là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng với P lần lượt đối xứng qua IA, IB, IC . Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Lời giải.

Giả sử điểm P nằm trong tam giác IAB . Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt đối xứng với P qua các cạnh BC, CA, AB . Ta sẽ chứng minh AA', BB', CC' đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_1P_2P_3$.

Hiển nhiên ta có $AP_2 = AP_3$ vậy để chứng minh AA' là trung trực của P_2P_3 ta cần chứng minh

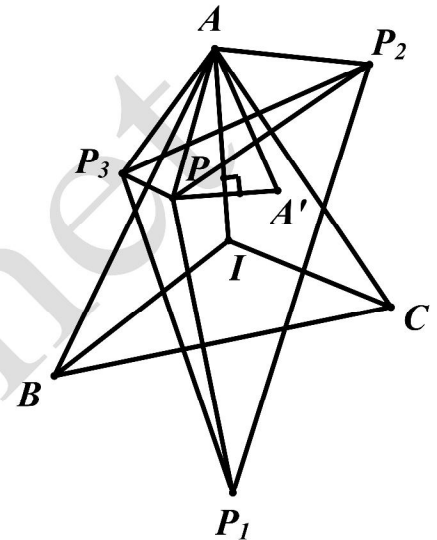
$$P_2AA' = P_3AA'.$$

Ta có $P_3AA' = P_3AP + PAA' = 2\alpha + 2\beta$

Tương tự $P_2AA' = P_2AC + CAA' = CAP + CAA'$

$$= 2\alpha + 2\beta. \text{ Vậy } P_2AA' = P_3AA' \text{ nên } AA' \text{ là trung trực của } P_2P_3.$$

Tương tự BB', CC' lần lượt là trung trực của P_1P_3 và P_1P_2 nên chúng đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $P_1P_2P_3$.



CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + 2y - 5 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng trục có trục là

- a) Ox
- b) Oy

10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y - 3 = 0$ và đường tròn $(C): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

a) Tìm ảnh của $d, (C)$ qua phép đối xứng trục Ox.

b) Viết phương trình đường tròn (C') , ảnh của (C) qua phép đối xứng qua đường thẳng d .

11.

a) Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm về một phía của d . Xác định điểm M trên d sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

b) Cho $x - 2y + 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2}.$$

12. Cho $A(2;1)$. Tìm điểm B trên trục hoành và điểm C trên đường phân giác góc phần tư thứ nhất để chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

13. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Bên ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$.

a) Gọi K là trung điểm của EG . Chứng minh K nằm trên đường thẳng AH .

b) Gọi P là giao điểm của DE và FG . Chứng minh P nằm trên đường thẳng AH .

c) Chứng minh các đường thẳng AH, CD, EF đồng qui.

14. Cho tam giác ABC cân tại A . Biết cạnh AB nằm trên đường thẳng d_1 , cạnh BC nằm trên đường thẳng d_2 , cạnh AC đi qua M . Hãy xác định các đỉnh của tam giác ABC .

15. Cho một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A . Trên d đặt một đoạn $BC = a$ ($a > 0$ cho trước). Tìm vị trí của đoạn BC để tổng $AB + AC$ nhỏ nhất.

16. Cho hai đường thẳng song song Δ_1, Δ_2 và điểm M nằm ở miền giữa của hai đường thẳng đó (M và Δ_1 cùng phía đối với Δ_2 , M và Δ_2 cùng phía đối với Δ_1). Trên Δ_1 lấy đoạn $AB = a$ trên Δ_2 lấy đoạn $CD = b$ (a, b là các độ dài cho trước). Tìm vị trí của các đoạn AB và CD sao cho tổng $MA + MB + MC + MD$ nhỏ nhất.

17. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A và có cạnh đều bằng a . Hãy chỉ ra một phép đối xứng trục biến hình vuông $ABCD$ thành hình vuông $AB'C'D'$.

18. Gọi d_A là đường phân giác ngoài tại A của tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi điểm M trên d_A , chu vi tam giác MBC không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC .

19. Cho tam giác ABC cân tại A . Với mỗi điểm M trên cạnh BC , ta dựng hình bình hành $APMQ$ (P thuộc cạnh AB và Q thuộc cạnh AC). Tìm tập hợp ảnh của điểm M trong phép đối xứng qua đường thẳng PQ .

20. Cho tam giác nhọn ABC

a) Gọi D là một điểm cố định trên cạnh BC . Xác định các điểm E, F trên AB và AC sao cho chu vi tam giác DEF nhỏ nhất.

b) Cho D thay đổi trên cạnh BC . Dựng tam giác DEF có chu vi nhỏ nhất với E, F lần lượt thuộc các cạnh AB, AC . Chứng minh khi chu vi tam giác DEF nhỏ nhất thì D, E, F là chân các đường cao của tam giác ABC . Tính giá trị nhỏ nhất của chu vi tam giác DEF theo $BC = a, CA = b, AB = c$.