Bài toán 03: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

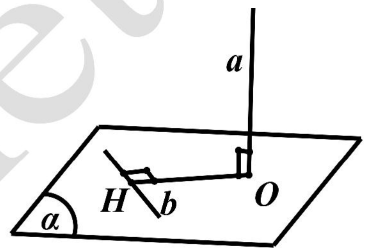
Phương pháp:

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

- Dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b. Khi đó $d(a,b)=MN$. Sau đây là một số cách dựng đoạn vuông góc chung thường dùng :

Nếu $a\perp b$ thì ta dựng đoạnvuông góc chung của a và b như sau

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$.
- Dựng $OH\perp b$.

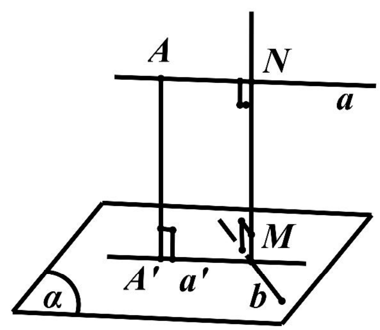


Đoạn OH chính là đoạn vuông góc chung của a và b.

Nếu a,b không vuông góc với nhau thì có thể dựng đoạn vuông góc chung của a và b theo hai cách sau:

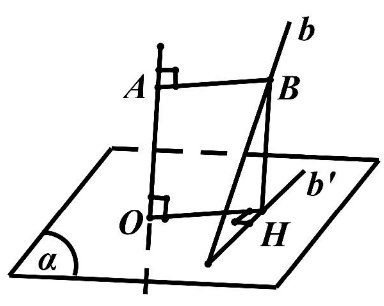
Cách 1.

- Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a.
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A\in a$ trên (α).
- Trong (α) dựng đường thẳng a' đi qua A' và song song với a cắt b tại M, từ M dựng đường thẳng song song với AA' cắt a tại N. Đoạn MN chính là đoạn vuông góc chung của a và b.

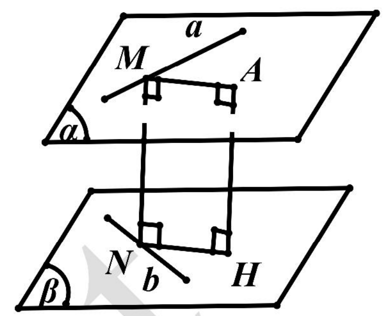


Cách 2.

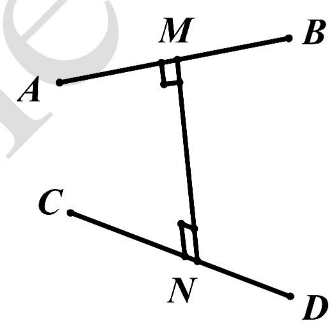
- Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a.
- Tìm giao điểm $O=a\cap(\alpha)$.
- Dựng hình chiếu b' của b trên (α)
- Trong (α) dựng $OH\perp b'$ tại H.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.
- Đoạn AB chính là đoạn vuông góc chung của a và b.



- Xem khoảng cách giữa hai đường thẳng a,b chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm $A\in a$ đến mặt phẳng (α) chứa b và $(\alpha)/\!/a$.
- Sử dụng $d(a,b)=d((\alpha),(\beta))=d(A,(\beta)), A\in(\alpha)$
- Sử dụng phương pháp vec tơ

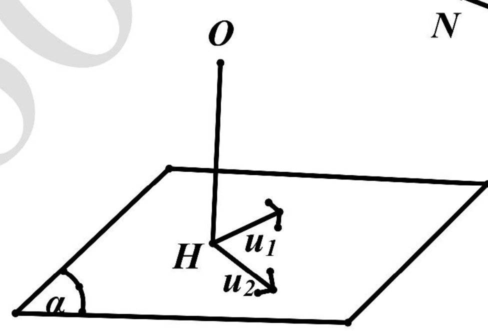


a) MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CN}=y\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$



b) Nếu trong (α) có hai vec tơ không cùng phương $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ thì $OH=d(O,(\alpha))\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{u_1}\\ \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{u_2}\\ H\in(\alpha)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{u_2}=0\\ H\in(\alpha)\end{cases}$.



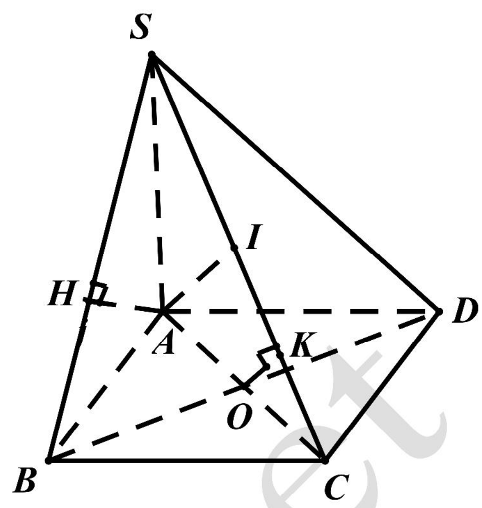
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA=a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng.

a) SB và AD.

b) BD và SC.

Lời giải.



a) Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Ta có

$$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$$

Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD, nên $d(AD,SB) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

.

Vậy $d(AD,SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $OK \perp SC, K \in SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vậy $d(BD,SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC)

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(BD,SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS \perp (ABCD)$ và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh BC,SD,SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) NP và AC.

b) MN và AP.

Lời giải.

a) Trong (SAB) kẻ $PJ \,//\, SI$, từ J kẻ $JE \,//\, BD, E \in AC$

Từ E kẻ $EF // PJ, F \in PN$.

Do $\begin{cases} PJ // SI \\ SI \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow PJ \perp (ABCD)$

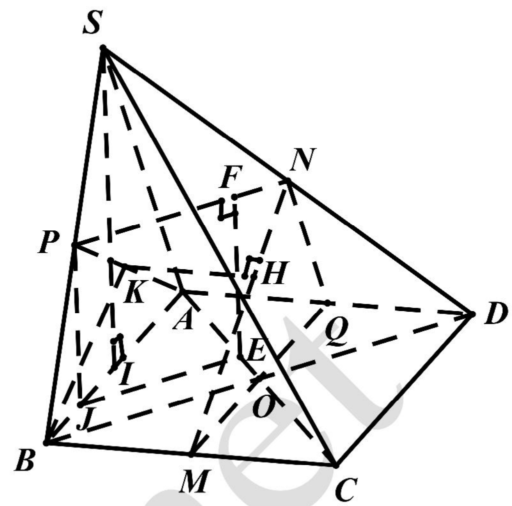
$\Rightarrow PJ \perp AC \ (1)$.

Lại có $\begin{cases} PN // BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow PN \perp AC \ (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có AC vuông góc với (PNJ) tại E, mà $EF \subset (PNJ) \Rightarrow AC \perp EF$.

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của NP và AC.

$d(AC, PN) = EF = PJ = \frac{1}{2}SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.



b) Gọi Q là trung điểm của AB.

Ta có $MQ // AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow MQ // (SAB)$.

Tương tự $NQ // SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow NQ // (SAB)$.

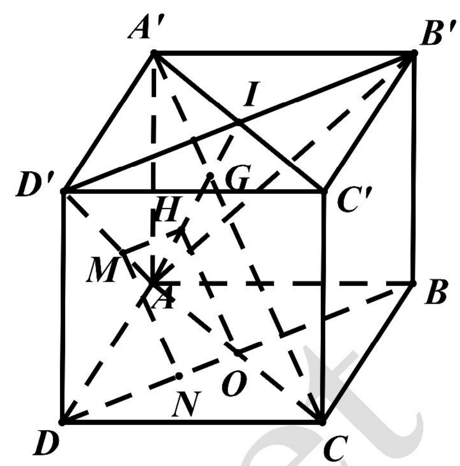
Vậy $(MNQ) // (SAB) \Rightarrow NM // (SAB)$. Lại có $\begin{cases} MB \perp AB \\ MB \perp SI \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của M trên (SAB). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AP tại K thì BK là hình chiếu của MN trên (SAB). Từ K kẻ đường thẳng song song với MB cắt MN tại H thì KH là đoạn vuông góc chung của MN và AP.

Vậy $d(MN, AP) = KH = MB = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 1) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.



Do $\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ AD' \subset (AB'D') \end{cases}$ nên $(AB'D')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên $(AB'D')$.

Do $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (CC'A') \Rightarrow B'D' \perp A'C \quad (1)$

Tương tự $A'C \perp AD' \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'C \perp (AB'D')$. Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$.

Do $\Delta AB'D'$ đều và $A'A = A'B' = A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Vậy Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì AI là trung tuyến của tam giác $AB'D'$ nên A, G, I thẳng hàng.

Trong $(ACC'A')$ dựng $OH \parallel CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O \in BD$ trên $(AB'D')$.

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD', BD) = MN$.

Dễ thấy $MNOH$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG$.

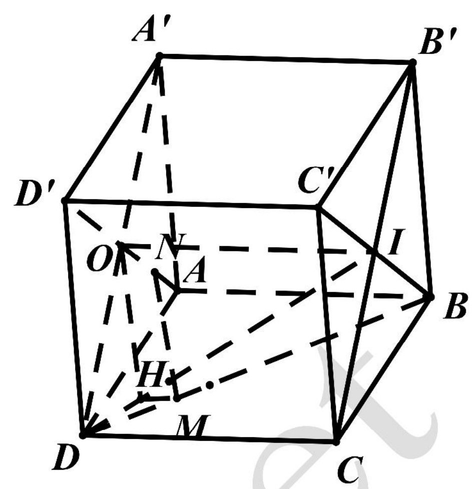
Mặt khác $\frac{GC}{GA'} = \frac{AC}{A'I} = 2 \Rightarrow CG = 2GA' \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CA' = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AD', BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 2) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Chon $(DCB'A')$ vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'. Gọi I là tâm của hình vuông $BCC'B'$ thì $BI \perp CB'$ và $BI \perp CD$ nên $BI \perp (DCB'A')$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $(DCB'A')$.



Trong $(DCB'A')$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d(AD',BD) = MN$.

Ta có $OHMN$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$, mặt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên

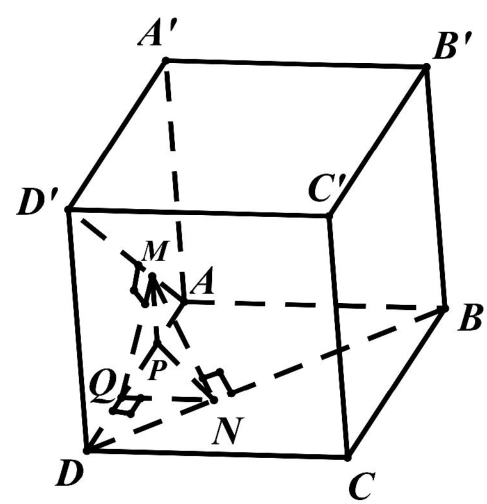
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(AD',BD) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 3. Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$. Từ M kẻ $MP \perp AD$, từ N kẻ $NQ \perp AD$.

Dễ thấy $BD \perp (MNP) \Rightarrow BD \perp NP$;

$AD' \perp (MNQ) \Rightarrow AD' \perp MQ$.



Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên

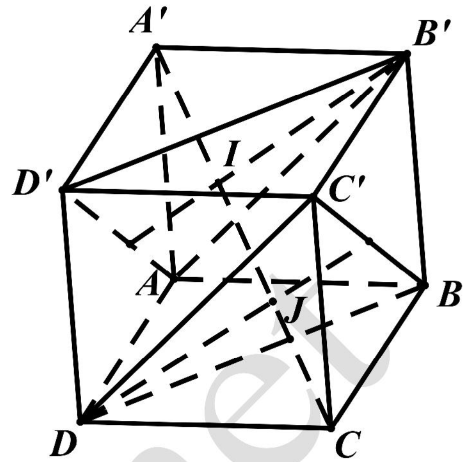
$$QD = QN = QP = MP = PA = \frac{a}{3}$$

Lại có $PN = \frac{DP}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Từ đó

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 4. Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.



Dễ thấy $\begin{cases} AD' \subset (AB'D') \\ BD \subset (BDC') \\ (AB'D') \,/\!/\, (BDC') \end{cases}$

$\Rightarrow d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC'))$.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của $A'C$ với các mặt phẳng $(AB'D'), (BDC')$.

Theo chứng minh trong cách 1 thì I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'D'$ và (BDC'). Mặt khác dễ dạng chứng minh được $A'C \perp (AB'D'), A'C \perp (BDC')$.

suy ra $d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC')) = IJ = \frac{1}{3} A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 5. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a, \vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{z} = \vec{z}\vec{x} = 0$

$\overrightarrow{AD'} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD'} = k(\vec{y} + \vec{z}), \overrightarrow{DB} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = m(\vec{x} - \vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = m\vec{x} + (1 - k - m)\vec{y} - k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{x} + (1 - k - m)\vec{y} + k\vec{z})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$

$\Leftrightarrow 2m + k - 1 = 0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0 \Leftrightarrow 1 - m - 2k = 0$, từ đó ta có hệ

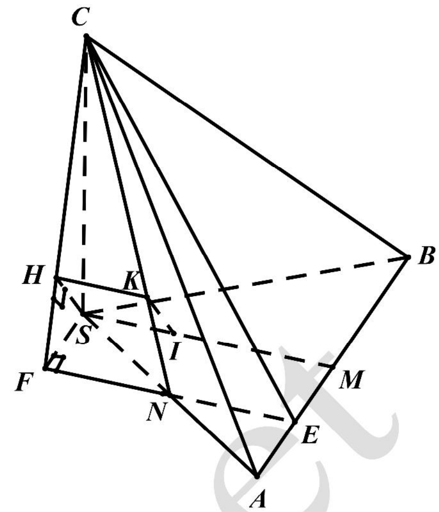
$\begin{cases} 2m + k = 1 \\ m + 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = k = \frac{1}{3}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z} \Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 4. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 1) rồi tính IK.



Gọi E là trung điểm của AM, ta có $\begin{cases} NE \subset (CNE) \\ SM \parallel NE \end{cases} \Rightarrow SM \parallel (CNE)$, do đó (CNE) là mặt phẳng chứa CN và song song với SM.

Trong (SAB), kẻ $SF \perp NE$ thì $\begin{cases} NE \perp SF \\ NE \perp CS \end{cases} \Rightarrow NE \perp (CSF) \Rightarrow (CSF) \perp (CNE)$

Trong (CSF) kẻ $SH \perp CF \Rightarrow SH \perp (CNE)$ vậy H là hình chiếu của S trên (CNE), từ H kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại K, từ K kẻ đường thẳng song song với SH cắt SM tại I thì IK là đoạn vuông góc chung của SN và CN.

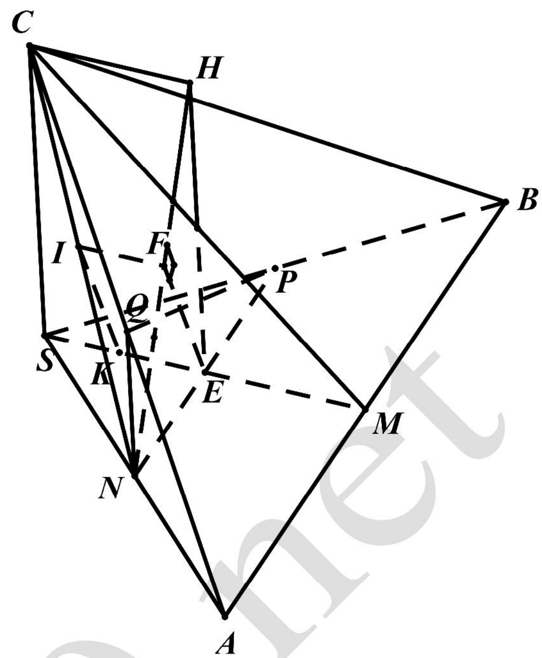
Ta có $SF = AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SF^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{9}{a^2}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $d(SM, CN) = IK = SH = \dfrac{a}{3}$.

Cách 2. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 2) rồi tính IK.

Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của SB và CN, E là giao điểm của NP và SM.



Khi đó $NQ // CS, CS \perp (SAB)$

$\Rightarrow NQ \perp (SAB) \Rightarrow NQ \perp SM$

Lại có $SM \perp NP \Rightarrow SM \perp (NPQ)$ tại E, dựng hình bình hành $CSEH \Rightarrow CH // SE$, mà $SE \perp (NPQ) \Rightarrow CH \perp (NPQ)$, vì vậy NH là hình chiếu của NC trên (NPQ). Kẻ $EF \perp NH$ tại F, từ F kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại I, từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt SM tại K thì IK là đoạn vuông góc chung của CN và SM.

Tam giác EHN vuông tại E có đường cao EF

$$\Rightarrow \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{EH^2} + \frac{1}{EN^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{\left(\frac{AB}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{9}{a^2}.$$

$\Rightarrow EF = \frac{a}{3}$. Vậy $d(CN,SM) = IK = EF = \frac{a}{3}$.

Cách 3. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi EF là đoạn vuông góc chung của SM và CN.

Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0$.

EF là đoạn vuông góc chung của SM và CN

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E \in SM \\ F \in CN \\ EF \perp SM \\ EF \perp CN \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SE} = x\overrightarrow{SM} \\ \overrightarrow{CF} = y\overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SM} = 0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CN} = 0 \end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ES} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{SE} = \vec{c} + y\overrightarrow{CN} - x\overrightarrow{SM}$

$$= \vec{c} - \frac{x}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + y\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}(y - x)\vec{a} - \frac{1}{2}x\vec{b} + (1 - y)\vec{c}.$$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{SM}=0 \\ \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CN}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y=0 \\ -x+5y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{9} \\ y=\frac{8}{9} \end{cases}$

Vậy đường vuông góc chung của SM và CN là đường thẳng EF

với $\overrightarrow{SE}=\frac{4}{9}\overrightarrow{SM},\overrightarrow{CF}=\frac{8}{9}\overrightarrow{CN}$.

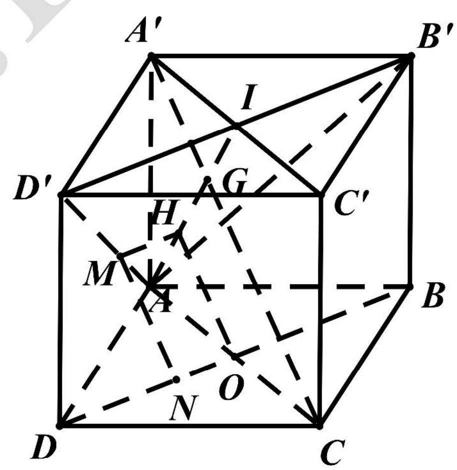
Lúc đó $\overrightarrow{EF}=\frac{2}{9}\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{1}{9}\vec{c} \Rightarrow EF=\sqrt{\frac{4}{81}\vec{a}^2+\frac{4}{81}\vec{b}^2+\frac{4}{81}\vec{c}^2}=\frac{a}{3}$.

Vậy $d(CN,SM)=EF=\frac{a}{3}$.

Ví dụ 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và BD.

Lời giải.

Cách 1. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 1) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.



Do $\begin{cases} BD \,//\, B'D' \\ AD' \subset (AB'D') \end{cases}$ nên $(AB'D')$ là mặt phẳng chứa AD' và song song với BD.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta dựng hình chiếu của điểm O trên $(AB'D')$.

Do

$\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (CC'A') \Rightarrow B'D' \perp A'C \quad (1)$

Tương tự $A'C \perp AD' \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'C \perp (AB'D')$. Gọi $G = A'C \cap (AB'D')$.

Do $\Delta AB'D'$ đều và $A'A = A'B' = A'D'$ nên G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Vậy Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì AI là trung tuyến của tam giác $AB'D'$ nên A,G,I thẳng hàng.

Trong $(ACC'A')$ dựng $OH \,//\, CA'$ cắt AI tại H thì H là hình chiếu của $O \in BD$ trên $(AB'D')$.

Từ H dựng đường thẳng song song với BD cắt AD' tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt BD tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD do đó $d(AD',BD)=MN$.

Dễ thấy $MNOH$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$. Do OH là đường trung bình trong tam giác $ACG \Rightarrow OH = \frac{1}{2}CG$.

Mặt khác $\frac{GC}{GA'} = \frac{AC}{A'I} = 2 \Rightarrow CG = 2GA' \Rightarrow CG = \frac{2}{3}CA' = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

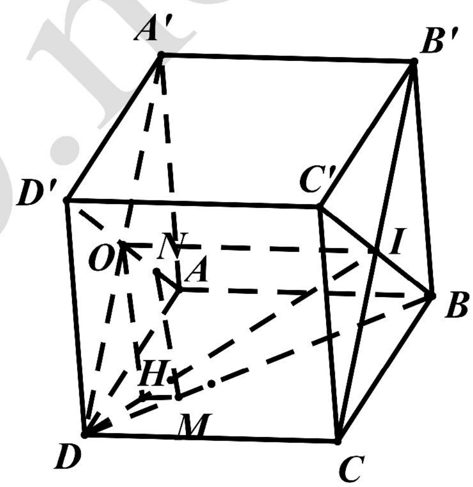
$\Rightarrow OH = \frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d\left(AD', BD\right) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

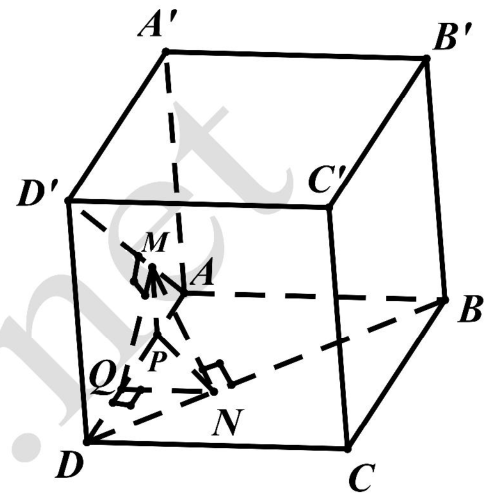
Cách 2. Dựng đường vuông góc chung (theo cách 2) rồi tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Chon $\left(DCB'A'\right)$ vuông góc với AD' tại trung điểm O của AD'. Gọi I là tâm của hình vuông $BCC'B'$ thì $BI \perp CB'$ và $BI \perp CD$ nên $BI \perp \left(DCB'A'\right)$ từ đó DI là hình chiếu của DB lên $\left(DCB'A'\right)$.

Trong $\left(DCB'A'\right)$ kẻ $OH \perp DI$, từ H dựng đường thẳng song song với AD' cắt BD tại M, từ M dựng đường thẳng song song với OH cắt OA tại N thì MN là đoạn vuông góc chung của của AD' và BD do đó $d\left(AD', BD\right) = MN$.



Ta có $OHMN$ là hình chữ nhật nên $MN = OH$, mặt khác OH là đường cao trong tam giác vuông ODI nên



$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d\left(AD',BD\right) = MN = OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 3. Giả sử MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$. Từ M kẻ $MP \perp AD$, từ N kẻ $NQ \perp AD$.

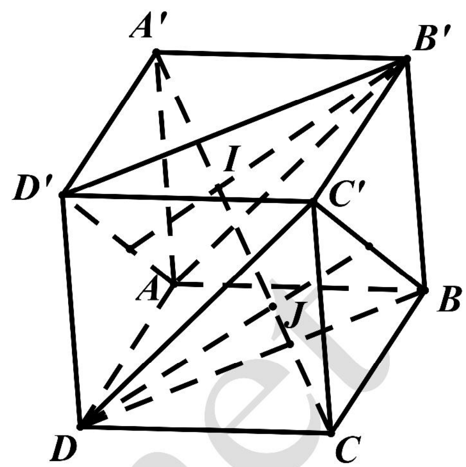
Dễ thấy $BD \perp \left(MNP\right) \Rightarrow BD \perp NP$; $AD' \perp \left(MNQ\right) \Rightarrow AD' \perp MQ$.

Hai tam giác AMQ và DNP vuông cân nên $QD = QN = QP = MP = PA = \frac{a}{3}$

Lại có $PN = \frac{DP}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{3\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Từ đó $MN^2 = PM^2 + PN^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 4. Xem khoảng cách cần tìm bằng khoảng cách của hai mặt phẳng song song chứa hai đường đó.



Dễ thấy $\begin{cases} AD' \subset (AB'D') \\ BD \subset (BDC') \\ (AB'D') /\!/ (BDC') \end{cases}$

$\Rightarrow d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC'))$.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của $A'C$ với các mặt phẳng $(AB'D'), (BDC')$.

Theo chứng minh trong cách 1 thì I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác $AB'D'$ và (BDC'). Mạt khác dễ dạng chứng minh được $A'C \perp (AB'D'), A'C \perp (BDC')$.

suy ra $d(AD', BD) = d((AB'D'), (BDC')) = IJ = \frac{1}{3}A'C = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 5. Sử dụng phương pháp vec tơ

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AD' và BD với $M \in AD', N \in BD$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y}, \overrightarrow{AA'} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = a, \vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{z} = \vec{z}\vec{x} = 0$

$\overrightarrow{AD'} = \vec{y} + \vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AD'} = k(\vec{y} + \vec{z}), \overrightarrow{DB} = \vec{x} - \vec{y} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = m(\vec{x} - \vec{y})$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} - k\vec{z}$

Vì $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow (m\vec{x} + (1-k-m)\vec{y} + k\vec{z})(\vec{x} - \vec{y}) = 0$

$\Leftrightarrow 2m + k - 1 = 0$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = 0 \Leftrightarrow 1 - m - 2k = 0$, từ đó ta có hệ

$\begin{cases} 2m + k = 1 \\ m + 2k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = k = \frac{1}{3}$.

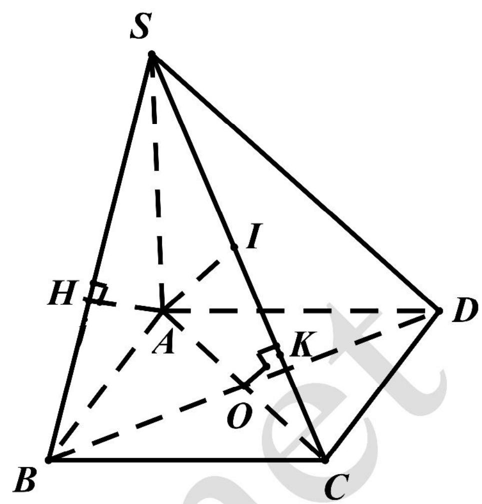
Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} - \frac{1}{3}\vec{z} \Rightarrow MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\frac{1}{9}\left(\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2\right)} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

a) SB và AD.

b) BD và SC.

Lời giải.



a) Kẻ đường cao AH của tam giác SAB. Ta có

$$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$$

Vậy AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD, nên $d(AD,SB) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A có đường cao AH nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD,SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và kẻ $OK \perp SC, K \in SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Vậy $d(BD,SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC)

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

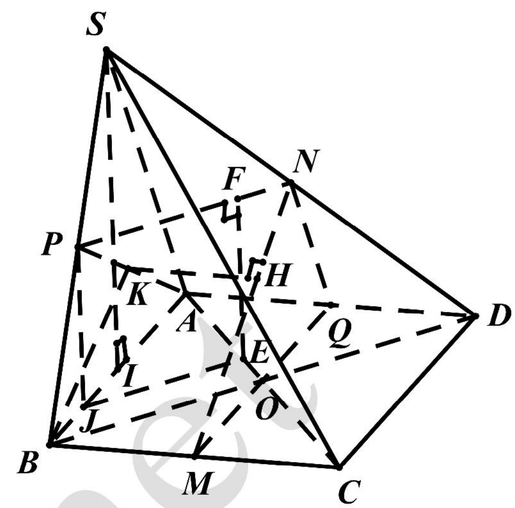
Vậy $d(BD,SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ví dụ 7. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, I là trung điểm của AB. Dựng $IS \perp (ABCD)$ và $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh BC,SD,SB. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) NP và AC.

b) MN và AP.

Lời giải.



a) Trong (SAB) kẻ $PJ // SI$, từ J kẻ $JE // BD, E \in AC$

Từ E kẻ $EF // PJ, F \in PN$.

Do $\begin{cases} PJ // SI \\ SI \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow PJ \perp (ABCD)$

$\Rightarrow PJ \perp AC \ (1)$.

Lại có $\begin{cases} PN // BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow PN \perp AC \ (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có AC vuông góc với (PNJ) tại E, mà $EF \subset (PNJ) \Rightarrow AC \perp EF$.

Vậy EF là đoạn vuông góc chung của NP và AC.

$d(AC,PN) = EF = PJ = \frac{1}{2}SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b) Gọi Q là trung điểm của AB.

Ta có $MQ // AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow MQ // (SAB)$.

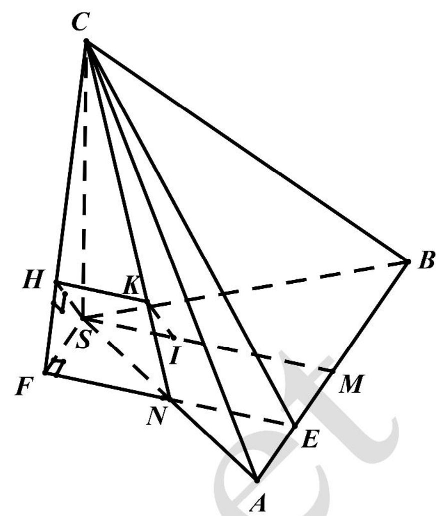
Tương tự $NQ // SA, SA \subset (SAB) \Rightarrow NQ // (SAB)$.

Vậy $(MNQ) // (SAB) \Rightarrow NM // (SAB)$. Lại có $\begin{cases} MB \perp AB \\ MB \perp SI \end{cases} \Rightarrow MB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của M trên (SAB). Từ B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AP tại K thì BK là hình chiếu của MN trên (SAB). Từ K kẻ đường thẳng song song với MB cắt MN tại H thì KH là đoạn vuông góc chung của MN và AP.

Vậy $d(MN, AP) = KH = MB = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SA. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CN .Cho tam giác ABC, dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.



Cách 1. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 1) rồi tính IK.

Gọi E là trung điểm của AM, ta có $\begin{cases} NE \subset (CNE) \\ SM \parallel NE \end{cases} \Rightarrow SM \parallel (CNE)$, do đó (CNE) là mặt phẳng chứa CN và song song với SM.

Trong (SAB), kẻ $SF \perp NE$ thì $\begin{cases} NE \perp SF \\ NE \perp CS \end{cases} \Rightarrow NE \perp (CSF) \Rightarrow (CSF) \perp (CNE)$

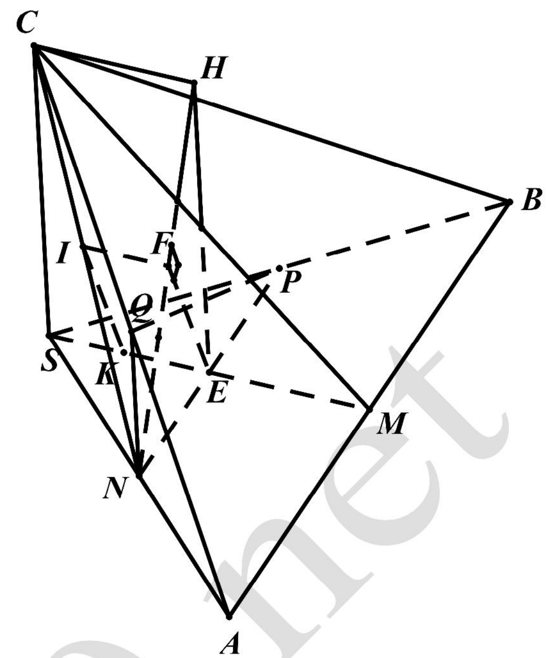
Trong (CSF) kẻ $SH \perp CF \Rightarrow SH \perp (CNE)$ vậy H là hình chiếu của S trên (CNE), từ H kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại K, từ K kẻ đường thẳng song song với SH cắt SM tại I thì IK là đoạn vuông góc chung của SN và CN.

Ta có $SF = AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SF^2} + \dfrac{1}{SC^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{9}{a^2}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $d(SM, CN) = IK = SH = \dfrac{a}{3}$.

Cách 2. Dựng đoạn vuông góc chung IK của hai đường thẳng SM và CN (theo cách 2) rồi tính IK.



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của SB và CN, E là giao điểm của NP và SM.

Khi đó $NQ // CS, CS \perp (SAB)$

$\Rightarrow NQ \perp (SAB) \Rightarrow NQ \perp SM$

Lại có $SM \perp NP \Rightarrow SM \perp (NPQ)$ tại E, dựng hình bình hành $CSEH \Rightarrow CH // SE$, mà $SE \perp (NPQ) \Rightarrow CH \perp (NPQ)$, vì vậy NH là hình chiếu của NC trên (NPQ). Kẻ $EF \perp NH$ tại F, từ F kẻ đường thẳng song song với SM cắt CN tại I, từ I kẻ đường thẳng song song với EF cắt SM tại K thì IK là đoạn vuông góc chung của CN và SM.

Tam giác EHN vuông tại E có đường cao EF

$$\Rightarrow \frac{1}{EF^2} = \frac{1}{EH^2} + \frac{1}{EN^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{\left(\frac{AB}{4}\right)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} = \frac{9}{a^2}.$$

$\Rightarrow EF = \frac{a}{3}$. Vậy $d(CN,SM) = IK = EF = \frac{a}{3}$.