Vấn đề 3. Chứng minh phương trình có nghiệm

Phương pháp :

• Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.

• Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})$ (i=1,2,…,k) nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Chứng minh rằng các phương trình sau có đúng một nghiệm.

1. $x^5+3x+1=0$ **2.** $x^3+2x=4+3\sqrt{3-2x}$

Lời giải.

1. Xét hàm số $f(x)=x^5+3x+1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Mặt khác: $f(-1)=-1, f(0)=1\Rightarrow f(-1).f(0)=-1<0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(-1;0\right)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1,x_2.

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0\Leftrightarrow\left(x_1^5-x_2^5\right)+3\left(x_1-x_2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)\underbrace{\left(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4+3\right)}_{A}=0\ \ (1)$$

Do $A=\left(x_1^2+\frac{1}{2}x_1x_2\right)^2+\left(\frac{1}{4}x_1x_2+x_2^2\right)^2+\frac{1}{2}x_1^2x_2^2+3>0$

Nên $(1)\Leftrightarrow x_1=x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm.

2. Điều kiện: $x\le\frac{3}{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4=0$

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x-3\sqrt{3-2x}-4$ liên tục trên $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$

$f(0)=-4-3\sqrt{3}<0,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{19}{8}>0\Rightarrow f(0).f\left(\frac{3}{2}\right)<0$

Nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm

Giả sử phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1, x_2

Khi đó: $f(x_1)-f(x_2)=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1^3-x_2^3\right)+2\left(x_1-x_2\right)-3\left(\sqrt{3-2x_1}-\sqrt{3-2x_2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x_1-x_2\right)\underbrace{\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+2+\dfrac{6}{\sqrt{3-2x_1}+\sqrt{3-2x_2}}\right)}_{B}=0$

$\Leftrightarrow x_1=x_2$

(Vì $B=\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3x_2^2}{4}+2+\dfrac{6}{\sqrt{3-2x_1}+\sqrt{3-2x_2}}>0$)

Vậy phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2 Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất một nghiệm :

1. $x^7+3x^5-1=0$ **2.** $x^2\sin x+x\cos x+1=0$

Lời giải.

1. Ta có hàm số $f(x)=x^7+3x^5-1$ liên tục trên R và $f(0).f(1)=-3<0$

Suy ra phương trinh $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.

2. Ta có hàm số $f(x)=x^2\sin x+x\cos x+1$ liên tục trên R và $f(0).f(\pi)=-\pi<0$.

Suy ra phương trinh $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;\pi)$.

Ví dụ 3. $\sqrt{x^5+2x^3+15x^2+14x+2}=3x^2+x+1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$x^5+2x^3+15x^2+14x+2=\left(3x^2+x+1\right)^2$

$\Leftrightarrow x^5-9x^4-4x^3+18x^2+12x+1=0$ (1)

Hàm số $f(x)=x^5-9x^4-4x^3+18x^2+12x+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2)=-95<0, f(-1)=1>0, f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{19}{32}<0$

$f(0)=1>0, f(2)=-47<0, f(10)=7921>0$

Do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng

$(-2;-1)$, $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$, $(0;2)$, $(2;10)$

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Chứng minh rằng phương trình sau có đúng ba nghiệm phân biệt

1. $x^3-3x+1=0$ **2.** $2x+6\sqrt[3]{1-x}=3$

Bài 2 Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của m, n

1. $m(x-1)^3(x+2)+2x+3=0$ **2.** $\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{\sin x}=m$

3. $m(x-a)(x-c)+n(x-b)(x-d)=0$ **$(a\le b\le c\le d)$.**

Bài 3 Cho $m>0$ và a,b,c là ba số thực bất kỳ thoả mãn $\dfrac{a}{m+2}+\dfrac{b}{m+1}+\dfrac{c}{m}=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 4. Chứng minh rằng phương trình :

1. $x^4+x^3-3x^2+x+1=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

2. $x^5-5x^3+4x-1=0$ có năm nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$

3. $a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$; $a,b,c>0$ có hai nghiệm phân biệt.

4. $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi m

5. $m^2.(x-2)+m(x-1)^3.(x-2)^4+3x-4=0$ có nghiệm với mọi m.

Bài 5 . Cho các số thực dương m,n,p thỏa mãn: $n<m;\ mp<n^2$ và $\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{p}=0$. Chứng minh rằng phương trình : $f(x)=ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

Bài 6.

1. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục.Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số thực $c\in[0;1]$ sao cho $f(c)=c$.

2. Cho hàm số $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ liên tục và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=L<1$ Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một số $c\ge 0$ sao cho $f(c)=c$.

3. Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục tại $x=0$ thỏa: $f(3x)=f(x)$.

4. Cho hàm số $f:[0;1]\to[0;1]$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa $f(0)=f(1)$.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phương trình $f(x)-f(x+\frac{1}{n})=0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0;1\right]$.

Bài 7.

1. Cho hàm số f liên tục trên đoạn [a ;b] và n điểm $x_1;x_2;...;x_n \in \left[a;b\right]$.
Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in \left[a;b\right]$ sao cho
$nf(c)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$.

2. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất các số $0<\alpha<\beta<1$ sao cho

$$\cos\alpha=\alpha^2 \text{ và } \beta\tan\beta=1.$$