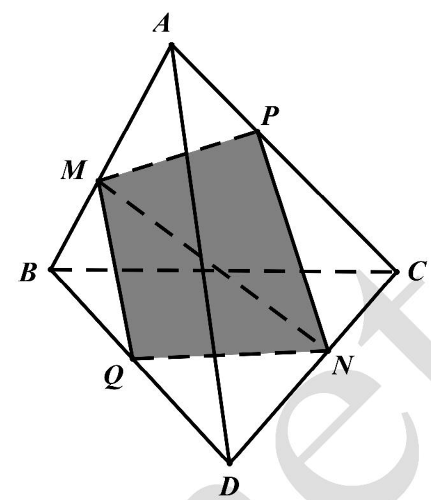
Bài toán 03: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ THALES.

Phương pháp:

Định lí Thales thừng được ứng dụng nhiều trong các bài toán tỉ số hay các bài toán chứng minh đường thẳng song song với một mặt phẳng cố định.



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ và M,N là các điểm thay trên các cạnh AB,CD sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}>0$ và P là một điểm trên cạnh AC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

c) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

Lời giải.

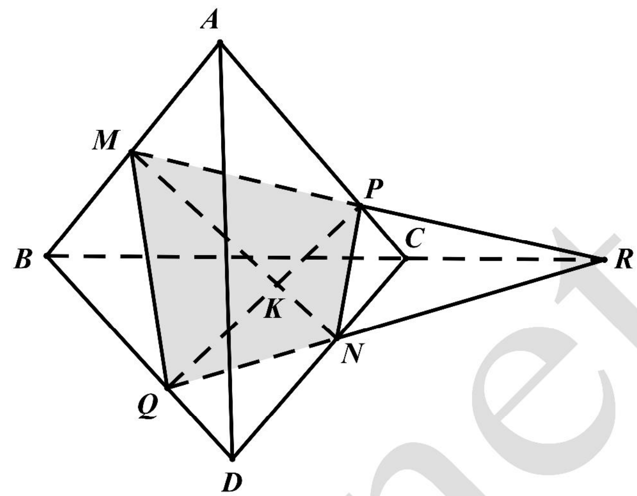
a) Do $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales thì các đường thẳng MN,AC,BD cùng song song với một mặt phẳng (β).Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với BD thì (α) cố định và $(\alpha)//(\beta)$suy ra MN luôn song song với (α) cố định.

b) Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}=k$, lúc này $MP//BC$ nên $BC//(MNP)$.

Ta có :

$$\begin{cases} N\in(MNP)\cap(BCD) \\ BC//(MNP) \\ BC\subset(BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD)\cap(MNP)=NQ//BC, Q\in BD.$$

Thiết diện là tứ giác $MPNQ$



.Xét trường hợp $\frac{AP}{PC} \neq k$

Trong (ABC) gọi $R = BC \cap MP$

Trong (BCD) gọi

$Q = NR \cap BD$ thì thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Gọi $K = MN \cap PQ$

Ta có $\frac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}} = \frac{PK}{PQ}$.

Do $\frac{AM}{NB} = \frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được

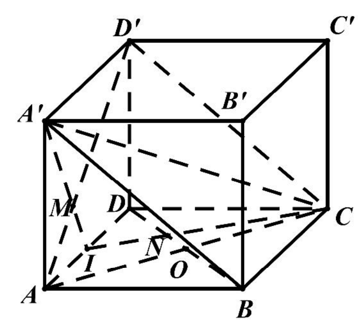
$$\frac{PK}{KQ} = \frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k \Rightarrow \frac{PK}{PQ} = \frac{PK}{PK + KQ} = \frac{\frac{PK}{KQ}}{\frac{PK}{KQ} + 1} = \frac{k}{k+1}.$$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN // A'C$.

Lời giải.



a) Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với $(A'D'CB)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với $(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N'.

Theo định lí Thales ta có

$\frac{AM}{AD'} = \frac{DN'}{DB}$ (1)

Vì các mặt của hình hộp là hình vuuong cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.

Từ (1) ta có $AM = DN'$, mà $DN = AM \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.

Mà $\begin{cases}(Q)\,//\,(A'D'CB)\\ MN\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow MN\,//\,(A'D'CB)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có

$DN=x=\frac{a\sqrt{2}}{3}, DO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow DN=\frac{2}{3}DO$ suy ra N là trọng tâm của tam giác ACD.

Tương tự M là trọng tâm của tam giác $A'AD$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có $\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3},\frac{IM}{IA'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{IN}{IC}=\frac{IM}{IA'}\Rightarrow MN\,//\,A'C$.