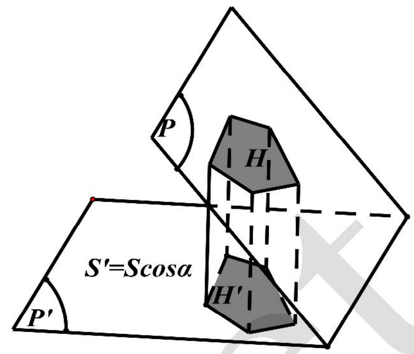
Bài toán 03: ỨNG DỤNG CÔNG THỨC HÌNH CHIẾU.

Giả sử S là diện tích đa giác (H) nằm trong (P) và S' là diện tích của hình chiếu (H') của (H) trên (P') thì $S' = S\cos\varphi$ trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc 45^0 và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M,N,P,Q. Tính diện tích thiết diện, biết cạnh đyá của lăng trụ bằng a.

Lời giải.

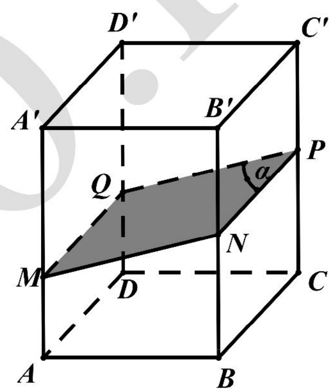
Gọi S là diện tích thiết diện $MNPQ$.

Ta có hình chiếu của $MNPQ$ xuống $(ABCD)$ chính là hình vuông $ABCD$.

$S' = S_{ABCD} = a^2$

Gọi $\varphi = ((\alpha),(ABCD))$ thì $\varphi = 45^0$

Do $S' = S\cos\varphi = S\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2}S' = \sqrt{2}a^2$.



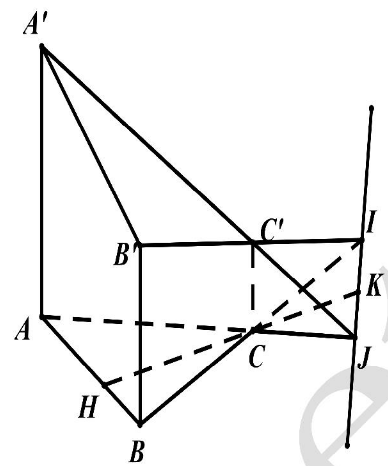
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 3a$, đường cao $CH = a$ và $AH = a$ nằm trong mặt phẳng (P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) kẻ từ A,B,C lần lượt lấy các điểm A',B',C' tương ứng nằm về một phía của (P) sao cho $AA_1 = 3a, BB_1 = 2a, CC_1 = a$. Tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABC} = \frac{3a^2}{2}$.

Vì $CH \perp AB, CH = a, AH = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ và $BAC = 45^0$.

Gọi $I = B'C' \cap BC, J = A'C' \cap AC$.



Ta có $CC' = \frac{1}{2}BB' \Rightarrow BC = CI$

$CC' = \frac{1}{3}AA' \Rightarrow CJ = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔBCH ta có

$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 5a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{5}$

Mặt khác $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.AB\cos C$

$\Rightarrow \cos C = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB} = -\frac{1}{10}$.

Xét ΔICJ ta có

$IJ^2 = CI^2 + CJ^2 - 2CI.CJ\cos ICJ = \frac{26a^2}{4}$.

Kẻ đường cao CK của ΔICK, do $CC' \perp (ICJ)$ nên $C'K \perp IJ$.

Vậy $C'KC$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'B'C')$

nên $S_{ABC} = S_{A'B'C'}\cos C'KC$.

Ta có $S_{ICJ} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{3a^2}{4}$, mặt khác $S_{ICJ} = \frac{1}{2}IJ.CK$

$\Rightarrow CK = \frac{2S_{ICJ}}{IJ} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{\frac{\sqrt{26}a}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{26}}$.

Xét $\Delta C'CK$ ta có $\tan C'KC = \frac{CC'}{CK} = \frac{a}{\frac{3a}{\sqrt{26}}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$.

Mà $1 + \tan^2 C'KC = \frac{1}{\cos^2 C'KC} \Rightarrow \cos C'KC = \frac{3}{\sqrt{35}}$.

Vậy $S_{ABC} = S_{A'B'C'}\cos C'KC \Rightarrow S_{A'B'C'} = \frac{S_{ABC}}{\cos C'KC} = \frac{\sqrt{35}}{2}a^2$.

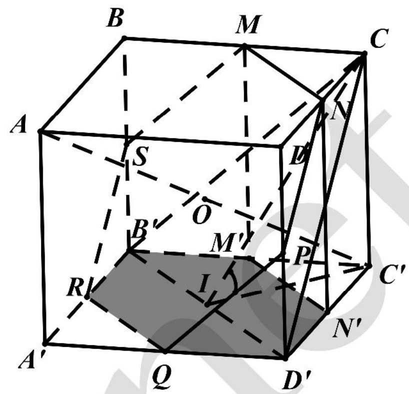
Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua tâm O của hình lập phương và vuông góc với đường chéo AC'. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cắt bởi (α).

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC, do $MA = MC' = a\sqrt{5}$ nên $\Delta MAC'$ cân tại M, mà O là trung điểm của $AC' \Rightarrow MO \perp AC' \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Tương tự , (α) sẽ cắt các cạnh $DC, DD', A'D', A', B'BB'$ tại các điểm N, P, Q, N, S. Thiết diện là lục giác $MNPQRS$ .Xét phép chiếu vuông góc xuống mặt phẳng $(A'B'C'D')$, ta có hình chiếu của lục giác $MNPQRS$ là lục giác $M'N'D'QRB'$.

Gọi S, S' lần lượt là diện tích của các lực giác $MNPQRS$ và $M'N'D'QRB'$ thì $S' = S\cos\varphi \quad (1)$ với φ là góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.



Ta có $S' = S_{A'B'C'D'} - \left(S_{A'QR} + S_{C'M'N'}\right)$

$$= a^2 - \left(\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8}\right) = \frac{3a^2}{4}. \quad (2)$$

Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ thì $(ICC') \perp B'D'$ nên CIC' là góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ta có $\cos CIC' = \dfrac{IC}{IC'} = \dfrac{IC}{\sqrt{CC'^2 + IC^2}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Lại có $(\alpha) // (CB'D')$ nên $\varphi = CIC' \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \quad (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $S = \dfrac{S'}{\cos\varphi} = \dfrac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Vậy diện tích thiết diện là $S = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.