

Bài toán 03: CHỨNG MINH BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG VÀ BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUI

Phương pháp:

Để chứng minh bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng ta tìm hai đường thẳng a,b lần lượt đi qua hai trong bốn điểm trên và chứng minh a,b song song hoặc cắt nhau, khi đó A,B,C,D thuộc $mp(a,b)$.

Để chứng minh ba đường thẳng a,b,c đồng qui ngoài cách chứng minh ở §1, ta có thể chứng minh a,b,c lần lượt là giao tuyến của hai trong ba mặt phẳng $(\alpha),(\beta),(\delta)$ trong đó có hai giao tuyến cắt nhau. Khi đó theo tính chất về giao tuyến của ba mặt phẳng ta được a,b,c đồng qui.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi M,N,E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA,SB,SC và SD.

- a) Chứng minh ME,NF,SO đồng qui (O là giao điểm của AC và BD).
- b) Bốn điểm M,N,E,F đồng phẳng.

Lời giải.

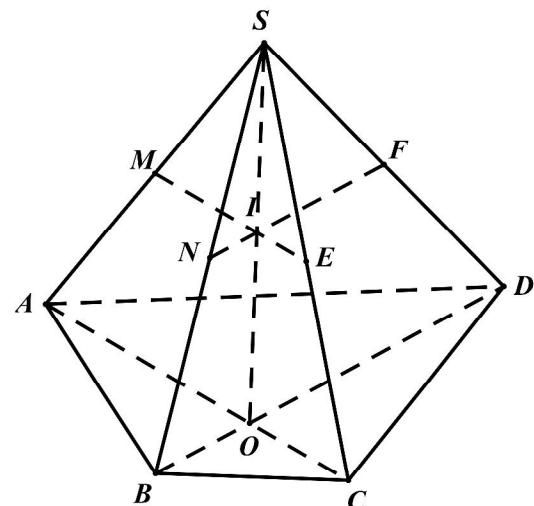
a) Trong (SAC) gọi $I = ME \cap SO$, dễ thấy I là trung điểm của SO, suy ra FI là đường trung bình của tam giác SOD .

Vậy $FI // OD$.

Tương tự ta có $NI // OB$ nên N,I,F thẳng hàng hay $I \in NF$.

Vậy minh ME,NF,SO đồng qui .

b) Do $ME \cap NF = I$ nên ME và NF xác định một mặt phẳng. Suy ra M,N,E,F đồng phẳng.



Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi M,N,E,F lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB,SBC,SCD và SDA . Chứng minh:

- a) Bốn điểm M,N,E,F đồng phẳng.
- b) Ba đường thẳng ME,NF,SO đồng quy (O là giao điểm của AC và BD).

Lời giải.

a) Gọi M',N',E',F' lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD và DA .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{SM}{SM'} &= \frac{2}{3}, \frac{SN}{SN'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'} \\ \Rightarrow MN &\parallel M'N' \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } \frac{SE}{SE'} = \frac{SF}{SF'} \Rightarrow EF \parallel E'F' \quad (2)$$

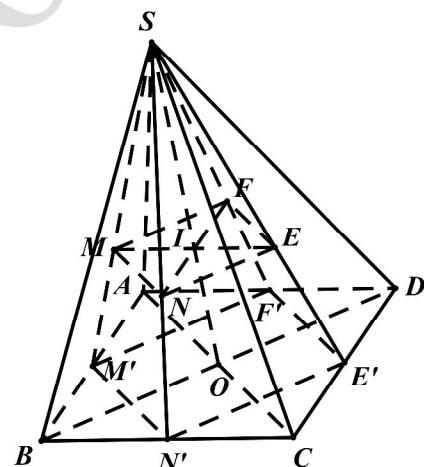
$$\text{Lại có } \begin{cases} M'N' \parallel AC \\ E'F' \parallel AC \end{cases} \Rightarrow M'N' \parallel E'F' \quad (3)$$

Từ (1),(2) và (3) suy ra $MN \parallel EF$. Vậy
bốn điểm M,N,E,F đồng phẳng.

b) Để thấy $M'N'E'F'$ cũng là hình bình hành và $O = M'E' \cap N'F'$.

Xét ba mặt phẳng $(M'SE')$, $(N'SF')$ và $(MNEF)$ ta có :

$$(M'SE') \cap (N'SF') = SO$$



$$(M'SE') \cap (MNEF) = ME$$

$$(N'SF') \cap (MNEF) = NF$$

$$ME \cap NF = I.$$

Do đó theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng thì ba đường thẳng ME, NF, SO đồng quy.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (BCD) .

20. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SBC và SAB .

a) Chứng minh $G_1G_2 \parallel AC$.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (BG_1G_2) và (ABC) .

21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

b) Gọi M là một điểm trên cạnh SC . Xác định giao điểm N của SD với (ABM) . Tứ giác $ABMN$ là hình gì?

c) Giả sử $I = AN \cap BM$. Chứng minh I thuộc một đường thẳng cố định khi M chạy trên cạnh SC .

22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD .

a) Chứng minh $MNPQ$ là một hình bình hành.

b) Gọi I là một điểm trên cạnh BC . Xác định thiết diện của hình chóp với (IMN) .

23. Cho tứ diện ABCD . Gọi I,J lần lượt là trung điểm của BC và BD , E là một điểm thuộc cạnh AD(E khác A và D).

a) Xác định thiết diện của tứ diện với (IJE) .

b) Tìm vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình bình hành.

c) Tìm điều kiện của tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình thoi.

24. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a . Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD và AB .

a) Hãy xác định các điểm $I \in AC$ và $J \in DN$ sao cho $IJ \parallel BM$.

b) Tính IJ theo a .

25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang.Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA,SB,SC và SD lần lượt tại các điểm M,N,P,Q .

a) Giả sử $MN \cap PQ = I$, $AB \cap CD = E$. Chứng minh I,E,S thẳng hàng.

b) Giả sử $\Delta = (IBC) \cap (IAD)$ và $\Delta \subset (\alpha)$.

Chứng minh $MQ \parallel NP \parallel AB \parallel CD$.

26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với $AD \parallel BC$. M là một điểm di động trong tứ giác ABCD . Qua M vẽ các đường thẳng song song với SA,SB cắt các mặt (SBC) và (SAD) lần lượt tại N,P .

a) Nêu cách dựng các điểm N,P .

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho $MN \cdot MP$ lớn nhất.

27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thang với đáy AD = a và BC = b. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,CD và SB.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ADP) và (SBC) .

b) Tìm độ dài đoạn giao tuyến của (ADP) và (SMN) nằm bên trong hình chóp.

28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB và SAD, M là điểm trên cạnh SA sao cho $MA = 2MS$. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MIJ) .

29. Cho hình chóp S.ABC, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M và song song SA,SB và SC cắt các mặt $(SBC), (SCA), (SAB)$ lần lượt tại các điểm A',B',C'.

a) Nêu cách dựng các điểm A',B',C'.

b) Chứng minh $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC}$ có giá trị không đổi khi O di động trong tam giác ABC.

c) Xác định vị trí của điểm M để tích $MA' \cdot MB' \cdot MC'$ lớn nhất.

30. Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (α) cắt bốn cạnh AB,BC,CD,DA

Lần lượt tại các điểm M,N,P,Q .

Chứng minh : $MA \cdot NB \cdot PC \cdot QD \leq \frac{AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD}{16}$. Khi đẳng thức xảy ra thì

MNPQ là hình gì?