DẠNG 3: Vị trí tương đối của điểm; đường thẳng; đường tròn với đường tròn

1. Phương pháp giải.

- *Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính IM

+ Nếu $IM < R$ suy ra M nằm trong đường tròn
+ Nếu $IM = R$ suy ra M thuộc đường tròn
+ Nếu $IM > R$ suy ra M nằm ngoài đường tròn

- *Vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d\ \ I;\Delta$

+ Nếu $d\ \ I;\Delta\ \ < R$ suy ra Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

+ Nếu $d\ \ I;\Delta\ \ = R$ suy ra Δ tiếp xúc với đường tròn

+ Nếu $d\ \ I;\Delta\ \ > R$ suy ra Δ không cắt đường tròn

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng Δ và đường tròn (C) bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

- *Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C')*

Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính II', $R+R'$, $\left|R-R'\right|$

+ Nếu $II' > R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau
+ Nếu $II' = R+R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau
+ Nếu $II' < \left|R-R'\right|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau
+ Nếu $II' = \left|R-R'\right|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau
+ Nếu $\left|R-R'\right| < II' < R+R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi phương trình đường thẳng (C) và đường tròn (C') bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và đường tròn

$C\ \ : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

a) Chứng minh điểm $M\ \ 2;1$ nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối giữa Δ và C

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất.

Lời giải:

a) Đường tròn (C) có tâm $I\ \ 2;-1$ và bán kính $R = 3$.

Ta có $IM = \sqrt{\ 2-2\ ^2 +\ 1+1\ ^2} = 2 < 3 = R$ do đó M nằm trong đường tròn.

b) Vì $d\ \ I;\Delta\ = \dfrac{\left|2+1+1\right|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} < 3 = R$ nên Δ cắt C tại hai điểm phân biệt.

c) Vì Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất nên Δ' vuông góc với Δ và đi qua tâm I của đường tròn (C).

Do đó Δ' nhận vectơ $\overrightarrow{u_\Delta} =\ 1;1$ làm vectơ pháp tuyến suy ra

$\Delta': 1\ \ x-2\ +1\ \ y+1\ = 0$ hay $x + y - 1 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta': x + y - 1 = 0$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn

$C\ : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và

$C'\ : x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B

c) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B và O

Lời giải

a) Cách 1: C có tâm $I\ \ 1;3$ và bán kính $R = 5$, C có tâm $I'\ \ 3;1$ và bán kính $R = \sqrt{13}$

$II' = \sqrt{\ 3-1\ ^2 +\ 1-3\ ^2} = 2\sqrt{2}$

Ta thấy $\left|R_1 - R_2\right| < I_1I_2 < \left|R_1 + R_2\right|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-15=0 \\ x^2+y^2-6x-2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-15=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2+y^2-2(y+3)-6y-15=0 \\ x=y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-y-6=0 \\ x=y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=3 \end{array}\right. \\ x=y+3 \end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $A(1;-2)$ và $B(6;3)$

b) Đường thẳng đi qua hai điểm A, B nhận $\overrightarrow{AB}(5;5)$ làm vecto chỉ phương suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x=1+5t \\ y=-2+5t \end{cases}$

c) Cách 1: Đường tròn cần tìm (C") có dạng
$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
(C") đi qua ba điểm A, B và O nên ta có hệ

$$\begin{cases} 1+4-2a+4b+c=0 \\ 36+9-12a-6b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{7}{2} \\ b=\dfrac{1}{2} \\ c=0 \end{cases}$$

Vậy (C") : $x^2+y^2-7x-y=0$
Cách 2: Vì A, B là giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') nên tọa độ đều thỏa mãn phương trình
$x^2+y^2-2x-6y-15+m(x^2+y^2-6x-2y-3)=0$ (*)
Tọa độ điểm O thỏa mãn phương trình (*) khi và chỉ khi
$-15+m.(-3)=0 \Leftrightarrow m=-5$

Khi đó phương trình (*) trở thành $x^2+y^2-7x-y=0$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-7x-y=0$

Ví dụ 3: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$

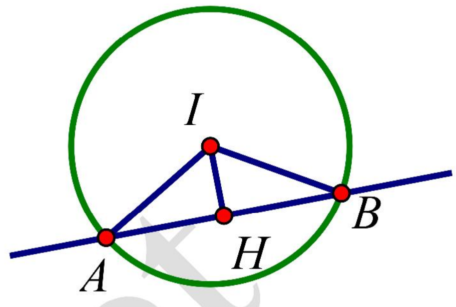
a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B

b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

Lời giải (hình 3.2)

a) Đường tròn (C) có tâm $I\left(1;-2\right)$, bán kính $R=3$

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi



Hình 3.2

$$d\left(I;\Delta\right)<R\Leftrightarrow\frac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}}<3$$

$\Leftrightarrow 5m^2+5m+17>0$ (đúng với mọi m)

b) Ta có

$$S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB=\frac{9}{2}\sin AIB\le\frac{9}{2}$$

Suy $\max S_{IAB}=\dfrac{9}{2}$ khi và chỉ khi

$\sin AIB=1\Leftrightarrow AIB=90^0$

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ khi đó

$$AIH=45^0\Rightarrow IH=IA.\cos 45^0=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Ta có

$$d\left(I;\Delta\right)=IH\Leftrightarrow\frac{\left|1-2m\right|}{\sqrt{2+m^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m^2+8m+16=0\Leftrightarrow m=-4$$

Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.86: Cho $d: x-5y-2=0$ và (C) có tâm $I\left(-1;2\right)$, bán kính $R=\sqrt{13}$

a) Viết phương trình đường tròn (C).

b) Tìm toạ độ giao điểm của (C) và d

Bài 3.87: Biện luận số giao điểm của (C) và d trong đó:

$$d: mx-y-3m-2=0,\ \left(C\right): x^2+y^2-4x-2y=0$$

Bài 3.88: Trong mặt phẳng toạ độ cho đường tròn $\left(C\right):\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=4$ và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua d. Tìm toạ độ các giao điểm của (C) và (C').

Bài 3.89: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-12x-4y+36=0$. Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Bài 3.90: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) và đường thẳng d lần lượt có phương trình: (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$, $d: x - y + 3 = 0$. Tìm toạ độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Bài 3.91: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C′) tâm $I(2;2)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 3.92: Cho hai đường tròn: $(C): x^2 + y^2 = 1$ và

$(C_m): x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$

Xác định m để (C_m) tiếp xúc với (C).

Bài 3.93. Trong mặt phẳng Oxy, Viết phương trình đường thẳng qua điểm O và cắt đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$. tại hai điểm A, B sao cho O là trung điểm của AB.

Bài 3.94. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn

$(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ và điểm $A(3;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A và cắt đường tròn (C) theo một dây cung MN sao cho

a) MN có độ dài lớn nhất b) MN có độ dài nhỏ nhất.

Bài 3.95. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn

$(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ có tâm I và điểm $M(-1;-3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Bài 3.96. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn: $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 + 4x = 0$. Một đường thẳng Δ đi qua giao điểm của (C) và (C') lần lượt cắt lại (C) và (C') tại M và N. Viết phương trình đường thẳng Δ khi MN đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3.97: Cho $(C): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ và $M(7;3)$. Viếp phương trình đường thẳng qua M cắt (C) tại A, B sao cho $MA = 3MB$.

Bài 3.98: Cho đường tròn $C\ : x^2+y^2=4$ và điểm $M\ 2;2$. Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt (C) tai hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB=2$.

Bài 3.99: Cho đường tròn $C\ :\ x-1\ ^2+\ y-1\ ^2=25$ và hai điểm $A\ 7;9\ ,\ B\ 0;8$. Tìm M trên đường tròn để $MA+2MB$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3.100: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-15=0.$ Gọi I là tâm đường tròn $(C).$ Đường thẳng Δ đi qua $M(1;-3)$ cắt (C) tại hai điểm A và B. Viết phương trình đường thẳng Δ biết tam giác IAB có diện tích bằng 8 và cạnh AB là cạnh lớn nhất.

Bài 3.101: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC là $x^2+y^2-x-5y+4=0$, H thuộc đường thẳng $\Delta: 3x-y-4=0$, trung điểm AB là $M\ 2;3$. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác.

Bài 3.102: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A\ 1;0$ và các đường tròn $C\ : x^2+y^2=2$ và $C'\ : x^2+y^2=5$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt nằm trên các đường tròn (C) và (C') để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Bài 3.103: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ và đường tròn $C\ : x^2+y^2-2x+2y-7=0$. Chứng minh rằng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B và tìm toạ độ điểm C trên (C) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng $3+\sqrt{2}\ \sqrt{7}$.

Bài 3.104: Trong mặt phẳng Oxy, gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A\ 2;1\ ,\ B\ 4;0\ ,\ C\ 3;\sqrt{2}-1$ và đường thẳng $d: 4x+y-4=0$. Tìm trên d điểm M sao cho tiếp tuyến của (C) qua M tiếp xúc với (C) tại N sao cho diện tích tam giác NAB lớn nhất.

Bài 3.105: Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy cho đường tròn $C \; : x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. Gọi B,C là giao điểm của đường thẳng $\Delta : x + y - 3 = 0$ với đường tròn (C). Hãy tìm điểm A trên đường tròn (C) sao cho tam giác ABC có chu vi lớn nhất.