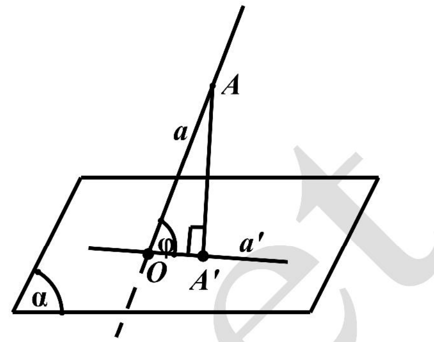
Bài toán 03: TÍNH GÓC GỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp:

Để xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thực hiện theo các bước sau:

- Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$
- Dựng hình chiếu A' của một điểm $A \in a$ xuống (α)
- Góc $AOA' = \varphi$ chính là góc giữa đường thẳng a và (α).



Lưu ý:

- Để dựng hình chiếu A' của điểm A trên (α) ta chọn một đường thẳng $b \perp (\alpha)$ khi đó $AA' /\!/ b$.
- Để tính góc φ ta sử dung hệ thức lượng trong tam giác vuông $\Delta OAA'$. Ngoài ra nếu không xác định góc φ thì ta có thể tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) theo công thức $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}$ trong đó $\vec{u}$ là VTCP của a còn $\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (α).

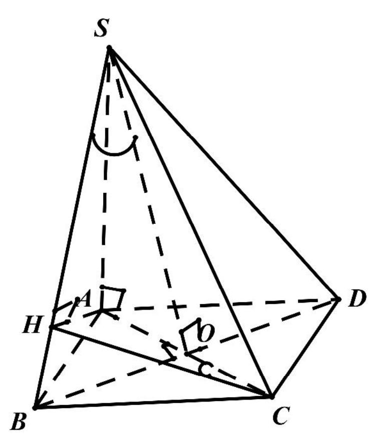
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính

a) Góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng (SAC).

b) Góc giữa AC với mặt phẳng (SBC).

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$ suy ra SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

Vậy $(SB,(SAC)) = BSO = \varphi$.

$$\sin\varphi = \frac{BO}{SB} = \frac{OB}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

$\Rightarrow \varphi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

b) Trong (SAB) gọi H là hình chiếu của A trên SB

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ đó ta có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$, hay CH là hình chiếu của CA trên (SBC). Vậy $(AC,(SBC)) = ACH = \alpha$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

$$\sin\alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{a\sqrt{\frac{6}{7}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

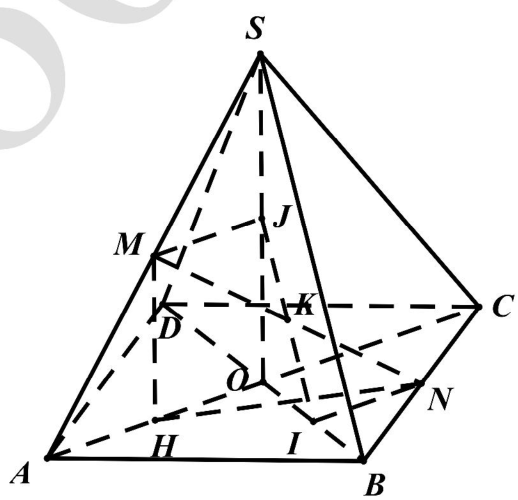
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, O là tâm của đáy, $SO \perp (ABCD)$; M,N lần lượt là trung điểm của SA,CD. Biết góc giữa MN với $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính góc giữa MN và (SBD).

Lời giải.

Cách 1. Kẻ $MH \,//\, SO, H \in OA$.

Do $\begin{cases} MH \,//\, SO \\ SO \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MH \perp (ABCD)$

suy ra NH là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$ $\Rightarrow MNH$ chính là góc giữa đường thẳng MN với $(ABCD)$.



$$HB^2 = OH^2 + OB^2$$

Ta có $= \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{2}$.

$$= \frac{5a^2}{8}$$

$\Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Xet ΔMHN có

$$MN = \frac{HN}{\cos 60^0} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}},\ MH = NH\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}.$$

Gọi I là trung điểm của OB, J là trung điểm của SO thì $MJ \,//\, IN$ và $MJ = IN$.

Gọi $K = IJ \cap MN \Rightarrow JK = \frac{1}{2}IJ$ và $MJ \perp (SBD) \Rightarrow MKJ$ là góc giữa MN và (SBD).

Ta có $IJ^2 = JO^2 + OI^2 = MH^2 + OI^2 = \frac{15a^2}{8} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 2a^2$.

$\Rightarrow IJ = a\sqrt{2}$ và $IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $MKJ = \varphi \Rightarrow \tan\varphi = \frac{MJ}{JK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$.

Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\varphi = \arctan\frac{1}{2}$.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)$

Suy ra $MN^2 = \frac{1}{4}\left(SO^2 + AC^2 + OB^2\right) = \frac{1}{4}\left(SO^2 + \frac{5a^2}{2}\right)$

$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}$.

Ta có φ là góc giữa MN và (SBD) nên $\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}\right|}$ ($\vec{n}$ là vec tơ có giá vuông góc với (SBD)).

Do $\begin{cases} AC \perp SO \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$ nên chọn $\vec{n} = \overrightarrow{AC}$, từ đó ta có

$$\sin\varphi = \frac{\left|\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\right)\overrightarrow{AC}\right|}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}AC^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.a\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{2SO^2 + 5a^2}} (*)$$

Do góc giữa đường thẳng MN và $(ABCD)$ bằng 60^0 nên

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SO}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\overrightarrow{SO}\right|} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}SO^2}{\frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + \frac{5a^2}{2}}.SO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 8SO^2 = 3\left(2SO^2 + 5a^2\right)$$

$\Leftrightarrow 2SO^2 = 15a^2$. Thay vào $(*)$ suy ra $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

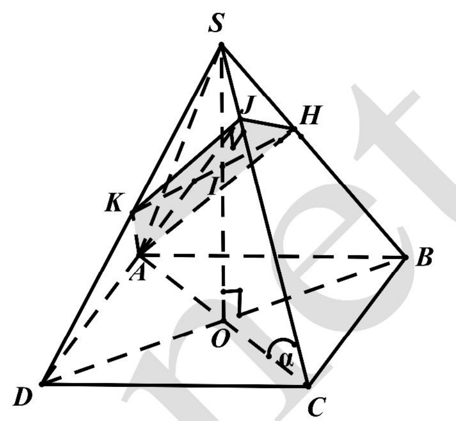
Vậy góc giữa MN và (SBD) là $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích $S_{td}=\frac{1}{2}a^2$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Giả sử (α) cắt các cạnh SB,SC,SD lần lượt tại các điểm H,J,K. Do $\begin{cases} BD\perp SO \\ BD\perp AC \end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$ mà $(\alpha)\perp SC\Rightarrow(\alpha)/\!/BD$.

Vậy



$$\begin{cases} BD\subset(SBD) \\ BD/\!/(\alpha) \\ (SBD)\cap(\alpha)=HK \end{cases}\Rightarrow KH/\!/BD\Rightarrow HK\perp(SAC)\Rightarrow HK\perp AJ$$

do đó $S_{AHJK}=\frac{1}{2}HK.AI$.

Do $SO\perp(ABCD)\Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ suy ra $(SC,(ABCD))=SCO=\varphi$.

Ta có $AJ=AC\sin\varphi=a\sqrt{2}\sin\varphi$; $SO=OC\tan\varphi=\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$.

$\Delta SOC\sim\Delta SJI\Rightarrow SIJ=SCO=\varphi\Rightarrow AIO=SIJ=\varphi$.

Từ đó ta có $OI=OA\cot\varphi=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi$.

$$\frac{HK}{BC}=\frac{SI}{SO}=1-\frac{OI}{SO}=1-\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}\cot\varphi}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi}=1-\cot^2\varphi$$

$\Rightarrow KH=BD\left(1-\cot^2\varphi\right)=a\sqrt{2}\left(1-\cot^2\varphi\right)$.

Vậy $S_{AHJK}=\frac{1}{2}HK.AI=a\sqrt{2}\sin\varphi.a\sqrt{2}\left(1-\cot^2\varphi\right)=2a^2\sin\varphi\left(1-\cot^2\varphi\right)$

Từ giả thiết suy ra $2a^2\sin\varphi\left(1-\cot^2\varphi\right)=\frac{1}{2}a^2\Leftrightarrow 4\sin^2\varphi-\sin\varphi-2=0$

$\sin\varphi=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ (do $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ nên $\sin\varphi>0$)

$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

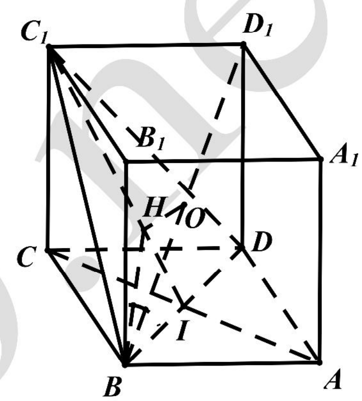
Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\varphi = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tìm góc lớn nhất giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1).

Lời giải.

Cách 1.

Gọi $I = AC \cap BD, O$ là trung điểm của BD_1 thì $O \in (CAA_1C_1)$.



Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC_1 \end{cases} \Rightarrow BD \perp (CAA_1C_1)$, hạ

$OH \perp IC_1, H \in IC_1$ thì $OH \perp (BDC_1)$, vậy góc giữa đường thẳng BD_1 và mặt phẳng (BDC_1) là góc

$OBH = \alpha$. Đặt $AB = AD = a, AA_1 = b$ thì

$BD_1 = \sqrt{AB^2 + AB^2 + DD_1^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$

$\Rightarrow OB = \frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$.

Dễ thấy $HO = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{OH}{OB} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + 5}}$

Do $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \ge 2 \Rightarrow \sin\alpha \le \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \le \arcsin\frac{1}{3}$ (Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

Vậy $\max\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$ khi $a = b$.

Cách 2. $\overrightarrow{CB} = \vec{x}, \overrightarrow{CD} = \vec{y}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{z} \Rightarrow |\vec{x}| = |\vec{y}| = a, |\vec{z}| = b$

$\overrightarrow{BD_1} = -\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$, $\left|\overrightarrow{BD_1}\right| = \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}$

Gọi H là hình chiếu của C trên C_1I thì $CH \perp C_1I$ và $CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (BDC_1)$.

Ta có $\frac{C_1H}{IH} = \frac{C_1H.C_1I}{IH.IC_1} = \frac{CC_1^2}{CI^2} = \frac{b^2}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2b^2}{a^2}$ nên

$$\overrightarrow{CH} = \frac{1}{1+\frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CC_1} + \frac{\frac{2b^2}{a^2}}{1+\frac{2b^2}{a^2}}\overrightarrow{CI} = \frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1} + \frac{b^2}{a^2+2b^2}.\overrightarrow{2CI}$$

$$\frac{a^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CC_1}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CI}=\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y}+\frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}$$

$$\left|\overrightarrow{CH}\right|=\sqrt{\frac{b^4}{\left(a^2+2b^2\right)^2}\vec{x}^2+\frac{b^4}{\left(a^2+2b^2\right)^2}\vec{y}^2+\frac{a^4}{\left(a^2+2b^2\right)^2}\vec{x}^2}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

Vậy $\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{CH}\right|\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}=\frac{\left|\left(-\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}\right)\left(\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{x}+\frac{b^2}{a^2+2b^2}\vec{y}+\frac{a^2}{a^2+2b^2}\vec{z}\right)\right|}{\sqrt{2a^2+b^2}\,\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}}$

$$=\frac{ab}{\sqrt{\left(a^2+2b^2\right)\left(2a^2+b^2\right)}}.$$

Theo BĐT AGM ta có $\frac{ab}{\sqrt{\left(a^2+2b^2\right)\left(2a^2+b^2\right)}}\le\frac{ab}{\sqrt{3\sqrt[4]{a^2b^4}\,3\sqrt[4]{b^2a^4}}}=\frac{1}{3}$

Vậy $\sin\alpha\le\frac{1}{3}\Rightarrow\alpha\le\arcsin\frac{1}{3}\Rightarrow\max\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ khi $a=b$.