

✎ **DẠNG 3. Xác định điểm nằm trên parabol thỏa mãn điều kiện cho trước.**

1. Phương pháp giải.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc parabol có phương trình chính tắc là $y^2 = 2px$ ta làm như sau

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in P \Leftrightarrow y_M^2 = 2px_M$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol (P): $y^2 = 8x$ có tiêu điểm F

- Tìm trên (P) điểm M cách F một khoảng là 3
- Tìm điểm M trên (P) sao cho $S_{\Delta OMF} = 8$
- Tìm một điểm A nằm trên parabol và một điểm B nằm trên đường thẳng $\Delta : 4x - 3y + 5 = 0$ sao cho đoạn AB ngắn nhất

Lời giải:

a) Giả sử $M(x_M; y_M) \in P$ suy ra $y_M^2 = 8x_M$ (*)

Từ phương trình (P) có $p = 4$ nên $F(2; 0)$

Ta có $FM = \frac{p}{2} + x_M$ suy ra $x_M = 1$ kết hợp (*) ta có $y_M = \pm 2\sqrt{2}$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(1; 2\sqrt{2})$, $M_2(1; -2\sqrt{2})$

b) Ta có $M \in P \Rightarrow M\left(\frac{a^2}{8}; a\right)$ với $a \geq 0$

$S_{\Delta OMF} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OF \cdot d(M; OF) = 8 \Leftrightarrow a = 8$

Vậy điểm M cần tìm là $M(8;8)$

c) Với mọi điểm $A \in P$, $B \in \Delta$ ta luôn có $AB \geq d(A; \Delta)$

$A \in P \Rightarrow A\left(\frac{a^2}{8}; a\right)$ với $a \geq 0$, khi đó

$$d(A; \Delta) = \frac{\left|4 \cdot \frac{a^2}{8} - 3a + 5\right|}{5} = \frac{a - 3^2 + 1}{10} \geq \frac{1}{10}$$

Suy ra AB nhỏ nhất khi và chỉ khi $A\left(\frac{9}{8}; 3\right)$ và B là hình chiếu của A lên

Δ

Đường thẳng đi qua A vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(3;4)$ làm vectơ pháp

tuyến nên có phương trình là $3\left(x - \frac{9}{8}\right) + 4(y - 3) = 0$. hay

$$24x + 32y - 123 = 0$$

Do đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x - 3y + 5 = 0 \\ 24x + 32y - 123 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{209}{200} \\ y = \frac{153}{50} \end{cases}$$

Vậy $A\left(\frac{9}{8}; 3\right)$, $B\left(\frac{209}{200}; \frac{153}{50}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.133: Cho (P): $y^2 = 16x$ và đường thẳng $\Delta: 4x - y - 8 = 0$

a) Chứng minh rằng Δ cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B

b) Tìm điểm M trên cung AB của (P) sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

Bài 3.134: Cho (P): $y^2 = x$ và 2 điểm $A(1; -1)$, $B(9; 3)$. Gọi M là một điểm thuộc cung AB của (P) (phần của (P) bị chắn bởi dây AB). Xác định vị trí của M trên cung AB sao cho diện tích tam giác MAB lớn nhất.

Bài 3.135: Cho parabol (P): $y^2 = 4x$ và điểm $I(0;1)$. Tìm A, B trên (P)

sao cho: $\vec{IA} = 4\vec{IB}$.

Bài 3.136. Cho hình thoi $ABCD$ tâm I . Biết hai cạnh AB và AD lần lượt có phương trình là $2x - y - 1 = 0$ và $x - 2y - 5 = 0$, tâm I thuộc Parabol $y^2 = x$. Tính tọa độ các đỉnh của hình thoi.