DẠNG 3. Xác định điểm nằm trên hypebol thỏa mãn điều kiện cho trước.

1. Phương pháp giải.

Để xác định tọa độ điểm M thuộc hypebol có phương trình chính tắc là $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$ ta làm như sau

- Giả sử $M(x_M; y_M)$, điểm $M \in (H) \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{a^2} - \frac{y_M^2}{b^2} = 1$ ta thu được phương trình thứ nhất.
- Từ điều kiện của bài toán ta thu được phương trình thứ hai; giải phương trình, hệ phương trình ẩn x_M, y_M ta tìm được tọa độ của điểm M

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1. Cho hypebol (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{6} = 1$ có tiêu điểm F_1 và F_2.

Tìm điểm M trên (H) trong trường hợp sau:

a) Điểm M có hoành độ là 4

b) Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông.

c) Khoảng cách hai điểm M và F_1 bằng 3

d) Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$

Lời giải

Giả sử $M(x_M; y_M) \in (H)$ suy ra $\frac{{x_M}^2}{9} - \frac{{y_M}^2}{6} = 1\,(*)$

a) Ta có $x_M = 4$ suy ra $y_M = \pm\sqrt{6\left(\frac{x_M^2}{9} - 1\right)} = \pm\frac{\sqrt{42}}{3}$

$\Rightarrow M_1\left(4; \frac{\sqrt{42}}{3}\right); M_2\left(4; -\frac{\sqrt{42}}{3}\right)$

b) Từ phương trình (H) có $a^2 = 9,\ b^2 = 6$ nên

$a = 3,\ b = \sqrt{6}, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15}$

Suy ra $F_1(-\sqrt{15};0); F_2(\sqrt{15};0)$

Ta có: $\overrightarrow{F_1M} = (x_M + \sqrt{15}; y_M); \overrightarrow{F_2M} = (x_M - \sqrt{15}; y_M)$

Điểm M nhìn hai tiêu điểm của (H) dưới một góc vuông nên

$\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M} = 0 \Leftrightarrow (x_M + \sqrt{15})(x_M - \sqrt{15}) + y_M^2 = 0 \Leftrightarrow y_M^2 = 15 - x_M^2$

thế vào (*) ta được

$\frac{{x_M}^2}{9} - \frac{15 - {x_M}^2}{6} = 1 \Leftrightarrow x_M = \pm\sqrt{\frac{63}{5}}$ suy ra $y_M = \pm\sqrt{\frac{12}{5}}$

Vậy có bốn điểm thỏa mãn là

$M_1\left(\sqrt{\frac{63}{5}};\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$, $M_2\left(-\sqrt{\frac{63}{5}};\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$, $M_3\left(\sqrt{\frac{63}{5}};-\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$ và

$M_4\left(-\sqrt{\frac{63}{5}};-\sqrt{\frac{12}{5}}\right)$

c) Ta có $MF_1 = \left|a + \frac{c}{a}x_M\right|$ nên

$$3 = \left|3 + \frac{\sqrt{15}}{3}x_M\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 0(l) \\ x_M = \frac{-18}{\sqrt{15}} \Rightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{210}}{5} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm: $M_1\left(-\frac{18}{\sqrt{15}};\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$ và $M_2\left(-\frac{18}{\sqrt{15}};-\frac{\sqrt{210}}{5}\right)$

d) Phương trình hai tiệm cận là : $d_1 : y = \frac{\sqrt{6}}{3}x; d_2 : y = -\frac{\sqrt{6}}{3}x$.

Tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận bằng $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ suy ra

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M - y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} + \frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M + y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}} = \frac{24\sqrt{2}}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M\right| + \left|\sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5} \quad **$$

Mặt khác $*$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{6}x_M - 3y_M$ $\sqrt{6}x_M + 3y_M$ $= 54 > 0$ suy ra

(**) $\Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M - 3y_M + \sqrt{6}x_M + 3y_M\right| = \frac{24\sqrt{30}}{5} \Leftrightarrow x_M = \pm\frac{12}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow y_M = \pm\frac{\sqrt{330}}{5}$

Vậy có bốn điểm $M_1\left(\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$,

$M_3\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ và $M_4\left(-\frac{12}{\sqrt{5}};-\frac{\sqrt{330}}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.129: Cho (H): $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{4} = 1$ và A $3;2$, B $0;1$. Tìm điểm $C \in$ H sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

Bài 3.130: Cho (H): $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Có tiêu điểm là F_1 (trái) và F_2 (phải)

a) Tìm M trên (H) với $MF_1 = 4$.

b) Tìm trên (H) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$

c) Tìm trên một nhánh của (H) hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều