✍ DẠNG 3. Sự tương giao giữa các đường cônic và với các đường khác.

1. Phương pháp giải.

Cho hai đường cong $f\ \ x;y\ \ =a,\ g\ \ x;y\ \ =b$ khi đó

- Số giao điểm của hai đường cong trên chính là số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f\ \ x;y\ \ =a \\ g\ \ x;y\ \ =b \end{cases}$
- Tọa độ giao điểm(nếu có) của hai đường cong là nghiệm của hệ $\begin{cases} f\ \ x;y\ \ =a \\ g\ \ x;y\ \ =b \end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho đường thẳng $\Delta : 2x-y+m=0$, elip (E): $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ và hypebol (H): $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1$

a) Với giá trị nào của m thì Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt ?

b) Chứng minh rằng với mọi m thì Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (H)

c) Tìm tọa độ giao điểm của (E) và (H). Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm đó.

Lời giải:

a) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-y+m=0 \\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+m \\ 9x^2+8mx+2m^2-6=0 \end{cases}$$

Do đó Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $9x^2+8mx+2m^2-6=0$ có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta' = 16m^2-9\ \ 2m^2-6\ \ >0 \Leftrightarrow -3\sqrt{3}<m<3\sqrt{3}$.

b) Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + m = 0 \\ \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + m \\ 7x^2 - 2mx - m^2 - 8 = 0 \quad * \end{cases}$$

Do $ac = -7.\ m^2 + 8 \ < 0$ nên phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu suy ra Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu nhau

Vậy Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (H)

c) Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{8} = 1 \end{cases} \quad I$

Giải hệ (I) ta được $\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{22}{17}} \\ y = \pm 2\sqrt{\dfrac{10}{17}} \end{cases}$

Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ (I) nên thỏa mãn phương trình

$$27\left(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3}\right) + 4\left(\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8}\right) = 31 \text{ hay } x^2 + y^2 = \frac{62}{17}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (E) và (H) là

$$M_1\left(\sqrt{\frac{22}{17}};2\sqrt{\frac{10}{17}}\right), M_2\left(-\sqrt{\frac{22}{17}};2\sqrt{\frac{10}{17}}\right), M_3\left(\sqrt{\frac{22}{17}};-2\sqrt{\frac{10}{17}}\right), M_4\left(-\sqrt{\frac{22}{17}};-2\sqrt{\frac{10}{17}}\right)$$

và phương trình đường tròn đi qua các điểm đó phương trình là

$$x^2 + y^2 = \frac{62}{17}$$

Nhận xét: Để viết phương trình đường tròn qua giao điểm của (E)

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, (H) $\dfrac{x^2}{a'^2} - \dfrac{y^2}{b'^2} = 1$

ta chọn α, β sao cho $\dfrac{\alpha}{a^2} + \dfrac{\beta}{a'^2} = \dfrac{\alpha}{b^2} - \dfrac{\beta}{b'^2} = k > 0, \alpha + \beta > 0$ khi đó

phương trình đường tròn cần tìm là $x^2 + y^2 = \dfrac{\alpha + \beta}{k}$

Ví dụ 2: Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và điểm I(1; 2). Viết phương trình đường thẳng đi qua I biết rằng đường thẳng đó cắt elip tại hai điểm A, B mà I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải:

Cách 1: Đường thẳng Δ đi qua I nhận $\vec{u}\ a;b$ làm vectơ chỉ phương có dạng $\begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \end{cases}$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$)

$A, B \in \Delta$ suy ra tọa độ A, B có dạng $A = (1 + at_1; 2 + bt_1)$,

$B = (1 + at_2; 2 + bt_2)$.

I là trung điểm của AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2x_I = x_A + x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ \ t_1 + t_2 \ \ = 0 \\ b\ \ t_1 + t_2 \ \ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0\ (1)$$

(do $a^2 + b^2 \neq 0$)

$A, B \in\ \ E$ nên t_1, t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1 + at)^2}{16} + \frac{(2 + bt)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow\ \ 9a^2 + 16b^2\ \ t^2 + 2\ \ 9a + 32b\ \ t - 139 = 0$$

Theo định lý Viet ta có $t_1 + t_2 = 0 \Leftrightarrow 9a + 32b = 0$

Ta có thể chọn $b = -9$ và $a = 32$.

Vậy đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x - 1}{32} = \dfrac{y - 2}{-9}$ hay

$9x + 32y - 73 = 0$

Cách 2: Vì I thuộc miền trong của elip (E) nên lấy tùy ý điểm $A(x; y) \in (E)$ thì đường thẳng IM luôn cắt (E) tại điểm thứ hai là $B\ \ x'; y'$.

I là trung điểm điểm AB khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2x_I = x_A + x_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases} \Rightarrow M'\ 2 - x; 4 - y$$

$$M, M' \in (E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{(2-x)^2}{16} + \dfrac{(4-y)^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{4-4x}{16} + \dfrac{16-8y}{9} = 0$ hay $9x + 32y - 73 = 0$ (*)

Tọa độ điểm M, I thỏa mãn phương trình (*) nên đường thẳng cần tìm là $9x + 32y - 73 = 0$

Nhận xét: Bài toán tổng quát " Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ a > b > 0$

và điểm $I(x_0; y_0)$ với $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} < 1$ (nghĩa là điểm I thuộc miền trong của elíp) . Viết phương trình đường thẳng đi qua I , biết rằng đường thẳng đó cắt elíp tại hai điểm M , M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' ".

Làm tương tự cách 2 ta có phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\frac{4x_0^2 - 4x_0x}{a^2} + \frac{4y_0^2 - 4y_0y}{b^2} = 0$$

Ví dụ 3: Cho hypebol (H): $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ và hai đường thẳng

$\Delta : x + my = 0,\ \Delta' : mx - y = 0$

a) Tìm m để Δ và Δ' đều cắt (H) tại hai điểm phân biệt

b) Xác định m diện tích tứ giác tạo bởi bốn giao điểm của Δ, Δ' và (H) đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải:

a) Từ phương trình Δ thế $x = -my$ vào phương trình (H) ta được

$$\left(\frac{m^2}{4} - \frac{1}{9}\right)y^2 = 1 \text{ (*)}$$

Suy ra Δ cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt hay

$$\frac{m^2}{4}-\frac{1}{9}>0 \Leftrightarrow m^2>\frac{4}{9} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty;-\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

Tương tự từ phương trình Δ thế $y=mx$ vào phương trình (H) ta được

$$\left(\frac{1}{4}-\frac{m^2}{9}\right)x^2=1$$

Suy ra Δ' cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$\frac{1}{4}-\frac{m^2}{9}>0 \Leftrightarrow m^2<\frac{9}{4} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$$

Vậy Δ và Δ' đều cắt (H) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$m \in \left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$$

b. Với $m \in \left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ thì Δ và Δ' cắt (H) tại bốn điểm phân biệt (**)

Dễ dàng tìm được giao điểm Δ và (H) là

$A\left(\frac{-6m}{\sqrt{9m^2-4}};\frac{6}{\sqrt{9m^2-4}}\right)$; $C\left(\frac{6m}{\sqrt{9m^2-4}};\frac{-6}{\sqrt{9m^2-4}}\right)$ và giao điểm Δ' và (H) là $B\left(\frac{-6}{\sqrt{9-4m^2}};\frac{-6m}{\sqrt{9-4m^2}}\right)$; $D\left(\frac{6}{\sqrt{9-4m^2}};\frac{6m}{\sqrt{9-4m^2}}\right)$ A đối xứng với C và B đối xứng với D qua gốc toạ độ O. Mặt khác $\Delta \perp \Delta'$ do đó tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Suy ra $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD=\frac{72\ \ m^2+1}{\sqrt{\ 9m^2-4\quad 9-4m^2}}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$S_{ABCD}=\frac{72\ \ m^2+1}{\sqrt{\ 9m^2-4\quad 9-4m^2}} \geq \frac{144.\ \ m^2+1}{9m^2-4\ \ +\ 9-4m^2}=\frac{144}{5}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $9m^2-4=9-4m^2 \Leftrightarrow m=\pm 1$ (thỏa mãn (**))

Vậy $m=\pm 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y^2 = 8x$. Đường thẳng Δ không trùng với trục Ox đi qua tiêu điểm F của (P) sao cho góc hợp bởi hai tia Fx và Ft là tia của Δ nằm phía trên trục hoành một góc bằng α $(\alpha \neq 90^0)$. Chứng minh rằng Δ Cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N và tìm tập hợp trung điểm I của đoạn MN khi α thay đổi.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có $F(2;0)$, đường thẳng Δ có hệ số góc $k = \tan\alpha$

Suy ra $\Delta : y = (x-2).\tan\alpha$. Xét hệ phương trình $\begin{cases} y = (x-2)\tan\alpha \\ y^2 = 8x \end{cases}$

(*)

Suy ra $\tan\alpha.y^2 - 8y - 16\tan\alpha = 0$ (**)

$\Delta' = 16 + 16\tan^2\alpha > 0$ do đó phương trình (**) luôn có hai nghiệm phân biệt, hệ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt điều này chứng tỏ rằng Δ Cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Gọi tọa độ hai giao điểm đó là $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$; $I(x_I;y_I)$ là trung điểm của MN

Theo định lý Viét ta có:

$$y_M + y_N = \frac{8}{\tan\alpha} > 0 \Rightarrow y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{4}{\tan\alpha}.$$

Mặt khác từ (*) ta có

$$y_M + y_N = (x_M + x_N - 4)\tan\alpha \Rightarrow x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{4}{\tan^2\alpha} + 2$$

Suy ra $x_I = 4.\left(\frac{y_I}{4}\right)^2 + 2$ hay $y_I^2 = 4x_I + 8$

Vậy tập hợp điểm I là đường cong có phương trình : $y^2 = px + \dfrac{p^2}{2}$

.(Cũng gọi là Parapol)

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.142: Cho (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

a) Xác định m để đường thẳng $d : y = x + m$ và (E) có điểm chung

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua M 1;1 và cắt (E) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn AB.

Bài 3.143: Cho (E): $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $\Delta : 3x + 4y - 12 = 0$

a) Chứng minh rằng Δ cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tính độ dài AB

b) Tìm toạ độ C thuộc (E) sao cho ΔABC cân tại A(biết hoành độ A bé hơn hoành độ B)

Bài 3.144: Cho (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và hai đường thẳng

$\Delta_1 : mx - nx = 0$, $\Delta_2 : nx + my = 0$, $m^2 + n^2 \neq 0$

a) Xác định giao điểm M, N của Δ_1 với (E) và P, Q của Δ_2 với (E)

b) Tính theo m, n diện tích tứ giác $MPNQ$

c) Tìm điều kiện m, n để diện tích tứ giác $MPNQ$ nhỏ nhất

Bài 3.145: (KB 2010) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A 2;$\sqrt{3}$ và elip (E): $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF_2.

Bài 3.146: Cho (H): $x^2 - 4y^2 = 20$ và đường thẳng $\Delta : x - 3y = 0$

a) Chứng minh rằng Δ cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B. Tính độ dài của đoạn AB.

b) Tìm toạ độ điểm C thuộc (H) sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.
c) Lập phương trình đường thẳng d đi qua $M\left(0;2\right)$ sao cho d cắt (H) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $3\overrightarrow{MA}-5\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Bài 3.147: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho Hypebol $\left(H\right):\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ và đường thẳng $d: x+3y+2007=0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ biết rằng Δ vuông góc với d và Δ cắt $\left(H\right)$ tại hai điểm M,N thoả mãn $MN=2\sqrt{10}$.

Bài 3.148: Cho (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Một đường thẳng Δ cắt (H) tại M, N cắt hai tiệm cận tại P,Q. Chứng minh $PM=NQ$.

Bài 3.149: Trên mặt phẳng Oxy, cho (E) là một elip di động nhưng luôn nhận hai tiêu điểm của hypebol (H): $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ làm các tiêu điểm và luôn có điểm chung với đường thẳng $\Delta: x-y+6=0$. Tìm giá trị bé nhất của độ dài trục lớn của elip (E).

Bài 3.150: Cho (P): $y^2=12x$ và đường thẳng $d: mx-y-3m=0$ $\left(m\neq 0\right)$

a) Chứng minh rằng với mọi $m\neq 0$, d luôn đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A, B
b) Chứng minh rằng đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn của (P).

Bài 3.151: Cho (P): $y^2=2px$ có tiêu điểm F. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2 qua F và vuông góc với nhau. Δ_1 cắt (P) tại M, N; Δ_2 cắt (P) tại P, Q. Chứng minh rằng $S_{MNPQ}\geq 8p^2$

Bài 3.152: Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P): $y=x^2-2x$ và elip (E): $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Chứng minh rằng (P) cắt (E) tại bốn điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Viết phương trình đường tròn đó.

Bài 3.153: Cho (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và điểm $M\quad 3;2$. Đường thẳng Δ đi qua M cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA=3MB$, xác định tọa độ các điểm A, B.

Bài 3.154: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxy,$ cho đường thẳng $d:2x+y+3=0$ và elíp $(E):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$ Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với *d* và cắt (*E*) tại hai điểm *A*, *B* sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.