

✎ **DẠNG 3: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn đẳng thức về tích vô hướng hoặc tích độ dài.**

1. Phương pháp giải.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với \vec{a} khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ \vec{a}

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a, vectơ \vec{a} khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$

b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải:

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = \frac{3a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4} \text{ (Do } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}) \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} \\ &\Leftrightarrow MI = a \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$

b) Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A.

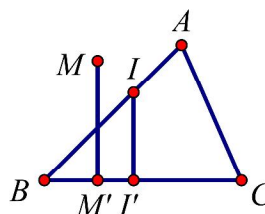
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Lời giải (hình 2.4)

Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Khi đó $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \right] \cdot \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$



Gọi M', I' lần lượt là hình chiếu của M, I lên đường thẳng BC

Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC}$ do đó $\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Vì $BC^2 > 0$ nên $\overrightarrow{M'I'}$, \overrightarrow{BC} cùng hướng suy ra

$$\overrightarrow{M'I'} \cdot \overrightarrow{BC} = BC^2 \Leftrightarrow M'I' \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M'I' = BC$$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC.

Ví dụ 3: Cho hình vuông ABCD cạnh a và số thực k cho trước.

Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$

Lời giải (hình 2.5)

Gọi I là tâm của hình vuông ABCD

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$$

Tương tự $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$

$$\text{Nên } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = k$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} + a^2$$

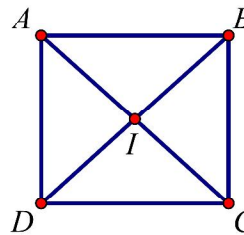
$$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\frac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

$$\text{Nếu } k > -a^2 \text{ thì } MI = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$$

suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\frac{k + a^2}{2}}$



Hình 2.5

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.38: Cho đoạn thẳng AB. Tìm tập hợp điểm M trong mỗi trường hợp sau:

a) $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

b) $MA^2 + 2MB^2 = k$ với k là số thực dương cho trước.

c) $\overrightarrow{AM} \cdot a = k$ với k là số thực cho trước.

Bài 2.39: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \cdot 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 0$

b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 0$

c) $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Bài 2.40: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $2MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} = 3a^2$

Bài 2.41. Cho tứ giác ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M

sao cho: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} IJ^2$.

Bài 2.42 : Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tìm tập hợp những điểm M sao cho :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}$$

Bài 2.43 : Cho tam giác ABC, góc A nhọn, trung tuyến AI. Tìm tập hợp những điểm M di động trong góc BAC sao cho : $AB \cdot AH + AC \cdot AK = AI^2$ trong đó H và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB và AC

Bài 2.44 : Cho tam giác ABC và k là số thực cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$MA^2 - MB^2 = k.$$

Bài 2.45 : Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k \text{ với } k \text{ là số cố định cho trước khi :}$$

a) $\alpha + \beta + \gamma = 0$

b) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$