DẠNG 5: Chứng minh hai điểm trùng nhau, hai tam giác cùng trọng tâm

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau :

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.

Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tuỳ ý.

- Để chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ cùng trọng tâm ta làm như sau:

Cách 1: Chứng minh G là trọng tâm ΔABC trùng với G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$

Cách 2: Gọi G là trọng tâm ΔABC (tức ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$) ta đi chứng minh $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID}, \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$

Do đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{ID}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \vec{0}$ hay I trùng với J

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử $\dfrac{AM}{AB} = k$ suy ra $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CA}$

Cách 1: Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm ΔABC và ΔMNP

Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G'M} + \overrightarrow{G'N} + \overrightarrow{G'P} = \vec{0}$ (*)

Ta có $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'M} = k\overrightarrow{AB}$

Tương tự $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'N} = k\overrightarrow{BC}$

Và $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'P} = k\overrightarrow{CA}$

Cộng vế với vế từng đẳng thức trên ta được

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\ +3\overrightarrow{GG'}+\ \overrightarrow{G'M}+\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'P}\ =k\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$

Kết hợp với (*) ta được $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$

Suy ra điều phải chứng minh

Cách 2: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Ta có: $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}$

$=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$

Vậy hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Ví dụ 3: Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

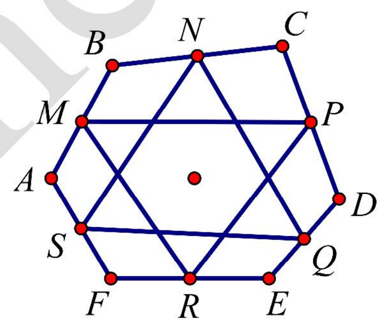
Lời giải (hình 1.26)

Gọi G là trọng tâm của ΔMPR suy ra

$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$ (*)

Mặt khác $2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB},\ 2\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD},$

$2\overrightarrow{GR}=\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}.$



Hình 1.26

$\Rightarrow 2(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR})=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}$ Kết hợp với (*) ta được

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GF})+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE})=\vec{0}$

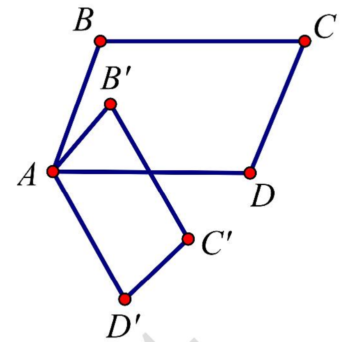
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GS}+2\overrightarrow{GN}+2\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$

Suy ra G là trọng tâm của ΔSNQ.

Vậy ΔMPR và ΔSNQ có cùng trọng tâm.

Ví dụ 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ cùng trọng tâm.



Hình 1.27

Lời giải (hình 1.27)

Gọi G là trọng tâm tam giác $BC'D$ suy ra

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$ (1)

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'}$

$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$ hay G là trọng tâm tam giác $B'CD'$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.50. Cho các tam giác ABC, $A'B'C'$ có G, G' lần lượt là trọng tâm .

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm .

Bài 1.51. Cho tam giác ABC , vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng ΔRIP, ΔJQS có cùng trọng tâm.

Bài 1.52. Cho tam giác ABC có A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C, C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Bài 1.53. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Bài 1.54. Cho tam giác ABC . Gọi A', B' ,C' là các điểm xác định bởi

$2011\overrightarrow{A'B}+2012\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C}+2012\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$,

$2011\overrightarrow{C'A}+2012\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$

Chứng minh rằng ΔABC và $\Delta A'B'C'$ cùng trọng tâm

Bài 1.55. Cho ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm G, gọi G_1, G_2, G_3 là trọng tâm các tam giác BCA', CAB', ABC'.Chứng minh rằng $\Delta G_1G_2G_3$ cũng có trọng tâm G

Bài 1.56. Cho tứ giác $ABCD$ có trọng tâm G. Gọi $G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4$ lần lượt là trọng tâm các tam giác $\Delta ABC,\ \Delta BCD,\ \Delta CDA,\ \Delta DAB$. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$

Bài 1.57. Cho tam giác ABC đều và M là một điểm nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng tam giác ABC và A_1, B_1, C_1 có cùng trọng tâm.

Bài 1.58. Cho các tam giác ABC, điểm O nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của O lên BC, CA, AB. Lấy các điểm A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc các tia $OA_1,\ OB_1,\ OC_1$ sao cho $OA_2 = a,\ OB_2 = b,\ OC_2 = c$. Chứng minh O là trọng tâm tam giác $A_2B_2C_2$

DẠNG 6: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vectơ cho trước.

1. Phương pháp giải.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
- Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right| = k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì
  + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in R$
  + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$
  + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$
- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC},\ B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : $\left|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$.

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\dfrac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$ ⇒ I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:

$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI}$ và

$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ nên

$|\ 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\ | = |\ \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\ | \Leftrightarrow |\ 9\overrightarrow{MI}\ | = |\ \overrightarrow{AB}\ | \Leftrightarrow MI = \dfrac{AB}{9}$

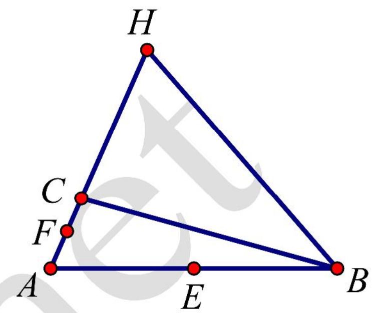
Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AB}{9}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ với k là số thực thay đổi

Lời giải (hình 1.28)



Hình 1.28

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{ME}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow ME=MF$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\ -3\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$

$=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HB}$

Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}=2k\overrightarrow{HB}\Leftrightarrow\overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{HB}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

Ví dụ 3: Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải (hình 1.29)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'C}$

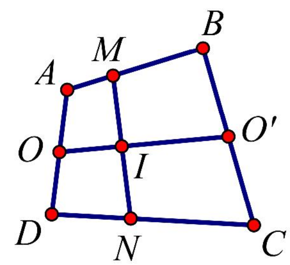
Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OO'}$

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{OI}$

Do đó $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\ \ k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{DC}\ \ =k\overrightarrow{OO'}$

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'



Hình 1.29

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.59. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ b) $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$

Bài 1.60. Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{MC}$ với k là số thực thay đổi

b) $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ cùng phương với véc tơ $\overrightarrow{BC}$

c) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ (HD: dựng hình bình hành ABCD)

Bài 1.61. Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

$a)\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right|$

$b)\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

Bài 1.62: Cho tứ giác $ABCD$.

a)Xác định điểm O sao cho : $\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OD}$.

b)Tìm tập hợp điểm M thoả mãn hệ thức $\left|\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right|=\left|3\overrightarrow{MA}\right|$

Bài 1.63: Cho lục giác đều ABCDEF . Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+\left|\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right|$ nhận giá trị nhỏ nhất

Bài 1.64: Trên hai tia Ox và Oy của góc xOy lấy hai điểm M, N sao cho $OM+ON=a$ với a là số thực cho trước. tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thẳng MN

✍ DẠNG 7: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ

1. Phương pháp giải.

Phân tính được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả " $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = 0$ với $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương "

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác $ABCD$. Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BM};\ \overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AN}$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MP}$

$= 5\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AD}$

$= 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) - 2\overrightarrow{AD}$

$= 2\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn: $a^2\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

Lời giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$.

Suy ra $\quad a^2\overrightarrow{GA} + b^2\overrightarrow{GB} + c^2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow a^2\ \ -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}\ \ + b^2\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$\Leftrightarrow\ \ b^2 - a^2\ \ \overrightarrow{GB} +\ \ c^2 - a^2\ \ \overrightarrow{GC} = \vec{0}.\ \ *$

Vì $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ là hai vecơ không cùng phương, do đó (*) tương đương với:

$\begin{cases} b^2 - a^2 = 0 \\ c^2 - a^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$ hay tam giác ABC đều.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thoả mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Lời giải

Giả sử $\overrightarrow{AB'} = m\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'} = n\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

và $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} = n\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Mặt khác A' là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Do đó $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + m\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

hay $\left(n - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương suy ra $m = n = \frac{1}{2}$ do đó B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB

Vậy BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

3. Bài tập luyên tập.

Bài 1.65: Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O thoả mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 1.66: Cho ABC có BB', CC' là các trung tuyến, A' là điểm trên BC thoả mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$. Chứng minh AA' cũng là trung tuyến của tam giác ABC.

Bài 1.67: Cho ABC có A', B', C' là các điểm thay đổi trên BC, CA, AB sao cho AA', BB', CC' đồng quy và thoả mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ Chứng minh AA', BB', CC' là các trung tuyến của tam giác ABC.

Bài 1.68: Cho 4 điểm A, B, C, D; I là trung điểm AB và J thuộc CD thoả mãn $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$. Chứng minh J là trung điểm của CD.

Bài 1.69: Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử tồn tại điểm O sao cho $OA = OB = OC = OD$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

Bài 1.70: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, gọi G là trọng tâm tam giác ABC. A', B', C' là các điểm thỏa mãn:
$\overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OC'}$. Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác $A'B'C'$.

Bài 1.71: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, gọi H là trực tâm tam giác . A', B', C' là các điểm thỏa mãn:

$\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'} = 3\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'} = 3\overrightarrow{OC}$. Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

Bài 1.72: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng AM cắt BC tại D, BM cắt CA tại E và CM cắt AB tại F. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm tam giác ABC.

DẠNG 8: Chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị liên quan đến độ dài vectơ

1. Phương pháp.

- Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có

+ $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$, dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

+ $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| \ge \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$, dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng

- Đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm cực trị của $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ với M thay đổi

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường thẳng Δ khi đó $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của M lên Δ.

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường tròn (O) khi đó $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn; $\left|\overrightarrow{MI}\right|$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia IO với đường tròn

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất $T = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right|$

Lời giải:

Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBI$ thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Khi đó : $T = \left| \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right) \right|$

$$= \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right| = \left|\overrightarrow{MI}\right|$$

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T = AA' + BB' + CC'$

Giải: Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{BG} + $$
$$+ \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$$
$$= 3\overrightarrow{GG'} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'}$$

Do đó:

$$AA' + BB' + CC' = \left|\overrightarrow{AA'}\right| + \left|\overrightarrow{BB'}\right| + \left|\overrightarrow{CC'}\right| \geq \left|\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right|$$
$$= 3\left|\overrightarrow{GG'}\right| = 3GG'$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vectơ $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ cùng hướng

Vậy giá trị nhỏ nhất T là $3GG'$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.73: Cho tam giác ABC, đường thẳng d và ba số α, β, γ sao cho $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức $T = \left|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 1.74: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trên đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$

a) Đạt giá trị lớn nhất

b) Đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 1.75: Cho tứ giác $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các tứ giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng
$T = AA' + BB' + CC' + DD'$

Bài 1.76: Cho tam giác ABC. M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$. Chứng minh rằng các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.
Do đó các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

Bài 1.77 : Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc cạnh AB và không trùng với các
đỉnh ta có: $MC.AB < MA.BC + MB.AC$

Bài 1.78: Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thuộc đoạn CD. Gọi p, p_1, p_2 lần lượt là chu vi của các tam giác AMB, ACB, ADB. Chứng minh rằng $p < \max\ \ p_1; p_2$.

Bài 1.79: Trên đường tròn tâm O bán kính bằng 1 lấy $2n+1$ điểm $P_i,\ i = 1,2,...,2n+1\ \ n \in N$ ở cùng phía với đối với đường kính nào đó.

Chứng minh rằng $\left|\sum_{i=1}^{2n+1}\overrightarrow{OP_i}\right| \geq 1$