➢ DẠNG TOÁN 3: CHỨNG MINH TẬP HỢP BẰNG NHAU, TẬP HỢP CON.

1. Phương pháp giải.

● Để chứng minh $A \subset B$

Lấy $\forall x,\ x \in A$ ta đi chứng minh $x \in B$

● Để chứng minh $A = B$ ta đi chứng minh

+ $A \subset B$ và $B \subset A$ hoặc $\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$

2.Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho các tập hợp $A = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z \right\}$, $B = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in Z \right\}$ và

$C = \left\{ -\frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z \right\}$

a) Chứng minh rằng $A = B$.

b) $A \subset C$

Lời giải

a) ● Ta có $\forall x \in A \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = \frac{\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$x = \frac{\pi}{3} - \pi + \left(k_0 + 1\right)\pi = -\frac{2\pi}{3} + \left(k_0 + 1\right)\pi$.

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow k_0 + 1 \in Z$ do đó $x \in B$ suy ra $A \subset B$ (1).

● $\forall x \in B \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = -\frac{2\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$x = -\frac{2\pi}{3} + \pi + \left(k_0 - 1\right)\pi = \frac{\pi}{3} + \left(k_0 - 1\right)\pi$.

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow k_0 - 1 \in Z$ do đó $x \in A$ suy ra $B \subset A$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A = B$.

b) Ta có $\forall x \in A \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = \frac{\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$x = \frac{\pi}{3} - \pi + \frac{2\left(k_0 + 1\right)\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\left(k_0 + 1\right)\pi}{2}$.

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow 2\left(k_0 + 1\right) \in Z$ do đó $x \in C$

Suy ra $A \subset C$.

Ví dụ 2: Cho A và B là hai tập hợp. Chứng minh rằng

a) $\left(A \setminus B\right) \subset A$ b) $A \cap \left(B \setminus A\right) = \varnothing$ c) $A \cup \left(B \setminus A\right) = A \cup B$

Lời giải

a) Ta có $\forall x,\ x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A$

Suy ra $\left(A \setminus B\right) \subset A$

b) Ta có $x \in A \cap \left(B \setminus A\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \left(B \setminus A\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Suy ra $A \cap \left(B \setminus A\right) = \varnothing$

c) Ta có $x \in A \cup \left(B \setminus A\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in \left(B \setminus A\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ x \notin A \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in A \cup B$

Ví dụ 3: Cho các tập hợp $A,\ B$ và C. Chứng minh rằng

a) $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$

b) $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$

c) $A \cap \left(B \setminus C\right) = \left(A \cap B\right) \setminus C$

Lời giải

a) Ta có $x \in A \cap \left(B \cup C\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \cup C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \in A \cap C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$

Suy ra $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$.

b) Ta có $x \in A \cup \left(B \cap C\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \cap C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$

Suy ra $A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$

c) Ta có $x \in A \cap \left(B \setminus C\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \setminus C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \\ x \notin C \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \notin C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(A \cap B\right) \setminus C$

Suy ra $A \cap \left(B \setminus C\right) = \left(A \cap B\right) \setminus C$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1.36: Cho $A = \{x \in N \mid x$ chia hết cho $4\}$, $B = \{x \in N \mid x$ chia hết cho $6\}$ và $C = \{x \in N \mid x$ chia hết cho $12\}$.

a) Chứng minh rằng $A \subset C$ và $B \subset C$

b) $A \cup B = C$

c) $A \not\subset B$

Bài 1.37: Cho các tập hợp $A = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z\right\}$, $B = \left\{\frac{11\pi}{6} + k2\pi, k \in Z\right\}$ và $C = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z\right\}$

a) Chứng minh rằng $A = B$.

b) $A \subset C$

Bài 1.38: Cho các tập hợp $A \subset B, C \subset D$. Chứng minh rằng

a) $A \cup C \subset B \cup D$ b) $A \cap C \subset B$ c) $C_B A \cup A = B$

Bài 1.39: Cho các tập hợp $A,\ B$ và C. Chứng minh rằng

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$