➢ **DẠNG TOÁN 3: MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT.**

Loại 1: Nhẩm nghiệm phương trình bậc hai, phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 1: Cho phương trình $2x^2 - mx + 5 = 0$. Biết phương trình có một nghiệm là 2. Tìm m và tìm nghiệm còn lại

Lời giải

Cách 1: Vì phương trình có nghiệm nên theo hệ thức Viét ta có $x_1x_2 = \frac{5}{2}$

Giả sử $x_1 = 2$ suy ra $x_2 = \frac{5}{4}$.

Mặt khác $x_1 + x_2 = \frac{m}{2} \Rightarrow 2 + \frac{5}{4} = \frac{m}{2} \Rightarrow m = \frac{13}{2}$.

Vậy $m = \frac{13}{2}$ và nghiệm còn lại là $\frac{5}{2}$

Cách 2: Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $8 - 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{2}$.

Theo hệ thức Viét ta có $x_1x_2 = \frac{5}{2}$ mà $x_1 = 2$ nên $x_2 = \frac{5}{4}$.

Vậy $m = \frac{13}{2}$ và nghiệm còn lại là $\frac{5}{2}$.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x) = 3x^2 - 14x + 8$ b) $g(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $P(x;y) = 6x^2 - 11xy + 3y^2$. d) $Q(x;y) = 2x^2 - 2y^2 - 3xy + x - 2y$.

Lời giải

a) Phương trình $3x^2 - 14x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ x = 4 \end{array}\right.$

Suy ra $f(x)=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-4)=(3x-2)(x-4)$

b) Phương trình $-x^4+5x^2-4=0 \Leftrightarrow -\left(x^2\right)^2+5x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right.$

Suy ra $g(x)=-\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=-(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

c) Xét phương trình $6x^2-11xy+3y^2=0$ ẩn x .

$\Delta_x=(11y)^2-4.18y^2=49y^2$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x=\frac{11y \pm 7y}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{y}{3} \\ x=\frac{3y}{2} \end{array}\right.$

Do đó $P(x;y)=6\left(x-\frac{y}{3}\right)\left(x-\frac{3y}{2}\right)=(3x-y)(2x-3y)$

d) Xét phương trình $2x^2-2y^2-3xy+x-2y=0$ (ẩn x)

$\Leftrightarrow 2x^2+(1-3y)x-2y^2-2y=0$

$\Delta_x=(1-3y)^2-8\left(-2y^2-2y\right)=25y^2+10y+1=(5y+1)^2$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x=\frac{3y-1 \pm (5y+1)}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=\frac{-y-1}{2} \end{array}\right.$

Do đó $Q(x;y)=2(x-2y)\left(x-\frac{-y-1}{2}\right)=(x-2y)(2x+y+1)$

Ví dụ 3: Phân tích đa thức $f(x)=x^4-2mx^2-x+m^2-m$ thành tích của hai tam thức bậc hai ẩn x .

Lời giải

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-2mx^2-x+m^2-m=0$

$\Leftrightarrow m^2-\left(2x^2+1\right)m+x^4-x=0$

$\Delta_m=\left(2x^2+1\right)^2-4\left(x^4-x\right)=4x^2+4x+1=\left(2x+1\right)^2$

Suy ra $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2x^2+1+2x+1}{2}=x^2+x+1\\ m=\dfrac{2x^2+1-2x-1}{2}=x^2-x\end{array}\right.$

Vậy $f\left(x\right)=\left(m-x^2-x-1\right)\left(m-x^2+x\right)$.

Loại 2: Bài toán liên quan đến biểu thức đối xứng hai nghiệm x_1,x_2 của phương trình bậc hai.

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^2-2\left(m+1\right)x+m^2+2=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;\ x_2$ sao cho

a) $x_1^3+x_2^3=2x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$

b) $\left|x_1^4-x_2^4\right|=16m^2+64m$

c) $A=x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)-6$ đạt giá trị nhỏ nhất

d) $B=\sqrt{2\left(x_1^2+x_2^2\right)+16}-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

Ta có phương trình có hai nghiệm $x_1;\ x_2\Leftrightarrow\Delta'\ge0$

$\Leftrightarrow\left(m+1\right)^2-\left(m^2+2\right)\ge0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{1}{2}$ (*)

Theo Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m+2\\ x_1.x_2=m^2+2\end{cases}$

a) Ta có $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$

Suy ra $x_1^3+x_2^3=2x_1x_2\left(x_1+x_2\right)\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=2x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$

$\Leftrightarrow\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-5x_1x_2\right]=0$

Suy ra $\left(2m+2\right)\left[\left(2m+2\right)^2-5\left(m^2+2\right)\right]=0\Leftrightarrow2\left(m+1\right)\left(-m^2+8m-6\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m+1=0\\ -m^2+8m-6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=4\pm\sqrt{10}\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có $m = 4 \pm \sqrt{10}$ thỏa mãn
Vậy $m = 4 \pm \sqrt{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
b) Ta có $\left|x_1^4 - x_2^4\right| = \left|\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right| = \left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right]\left|x_1 - x_2\right|\left|x_1 + x_2\right|$

Mà

$$\left|x_1 - x_2\right| = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2} = \sqrt{\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(2m + 2\right)^2 - 4\left(m^2 + 2\right)} = \sqrt{8m - 4}$$

Suy ra

$$\left|x_1^4 - x_2^4\right| = \left[\left(2m + 2\right)^2 - 2\left(m^2 + 2\right)\right]\sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right|$$

$$= \left(2m^2 + 8m\right)\sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right|$$

Suy ra $\left|x_1^4 - x_2^4\right| = 16m^2 + 64m \Leftrightarrow \left(2m^2 + 8m\right)\sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right| = 16m^2 + 64m$

$$\Leftrightarrow \left(m^2 + 4m\right)\left(\sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right| - 8\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 4m = 0 \ (1) \\ \sqrt{8m - 4}\left|2m + 2\right| = 8 \ (2) \end{array}\right.$$

Ta có $\left(1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -4 \end{array}\right.$ (loại)

$$\left(2\right) \Leftrightarrow \left(8m - 4\right)\left(2m + 2\right)^2 = 64 \Leftrightarrow 32m^3 + 48m^2 - 80 = 0$$

$\Leftrightarrow m = 1$(thỏa mãn (*))
Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
c) Ta có $A = x_1x_2 - 2\left(x_1 + x_2\right) - 6 = m^2 + 2 - 2\left(2m + 2\right) - 6 = m^2 - 4m - 8$

$$\Rightarrow A = \left(m - 2\right)^2 - 12 \geq -12$$

Suy ra $\min A = -12 \Leftrightarrow m = 2$, $m = 2$ thỏa mãn (*)
Vậy với $m = 2$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.
d) $B = \sqrt{2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 16} - 3x_1x_2 = \sqrt{2\left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 + 16} - 3x_1x_2$

$$= \sqrt{2\left(2m + 2\right)^2 - 4\left(m^2 + 2\right) + 16} - 3\left(m^2 + 2\right) = \sqrt{4m^2 + 16m + 16} - 3\left(m^2 + 2\right)$$

$$= 2m + 4 - 3\left(m^2 + 2\right) = -3m^2 + 2m - 2$$

Xét hàm số $y = -3m^2 + 2m - 2$ với $m \geq \dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\frac{7}{4}$ ↘	$-\infty$

Suy ra giá trị $\max\limits_{m \geq \frac{1}{2}} y = -\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức B là $-\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

c) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$

Lời giải

a) Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$ nên phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m

b) Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = m - 1$

Suy ra hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là $x_1x_2 = x_1 + x_2 - 1$

c) Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2m + 2$.

Suy ra $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \dfrac{2m+1}{m^2+2}$

Vì $A - 1 = \dfrac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \dfrac{2m + 1 - m^2 - 2}{m^2 + 2} = -\dfrac{(m-1)^2}{m^2+2} \leq 0, \forall m \Rightarrow A \leq 1, \forall m$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$

Và $A+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2m+1}{m^2+2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\left(2m+1\right)+m^2+2}{2\left(m^2+2\right)}=\dfrac{\left(m+2\right)^2}{2\left(m^2+2\right)}\ge 0,\ \forall m \Rightarrow A\ge -\dfrac{1}{2},\ \forall m$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=-2$

Vậy $\max A=1$ khi và chỉ khi $m=1$, $\min A=-\dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $m=-2$

Chú ý: Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{2m+1}{m^2+2}$ ta làm như sau

Xét $A-k=\dfrac{-km^2+2m-2k^2+1}{m^2+2}$. Khi đó để biểu thức đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thì tử số là biểu thức $f\left(m\right)=-km^2+2m-2k^2+1$ phải biểu diễn được dưới dạng bình phương hay

$\Delta_m=0 \Leftrightarrow 1+k\left(1-2k\right)=0 \Leftrightarrow -2k^2+k+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. Vì vậy ta mới đi xét như trên.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.13: Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x)=2x^2-5x+3$ b) $g(x)=2x^4-14x^2-36$

c) $P(x;y)=3x^2-5xy-2y^2$. d) $Q(x;y)=x^2-2y^2-xy-3y-1$.

Bài 3.14: Phân tích đa thức $f\left(x\right)=2x^3+\left(m+1\right)x^2+2mx+m^2+m$ (biến x với tham số m) thành tích một đã thức bậc hai và một bậc nhất.

Bài 3.15: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $-x^2+3x+1=0$. Tính giá trị của các biểu thức:

$$A=x_1^2+x_2^2;\ B=x_1^3\left(x_1-1\right)+x_2^3\left(x_2-1\right);\ C=\left|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}\right|.$$

Bài 3.16: Tìm m để phương trình $3x^2+4\left(m-1\right)x+m^2-4m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)$.

Bài 3.17: Cho phương trình $x^2-2\left(m-1\right)x+m^2-3=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1;\ x_2$ sao cho

a) $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

b) $A = 2\left(x_1^2 + x_2^2\right) - x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

c) $B = \dfrac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất