➢ DẠNG TOÁN 4: HỆ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN .

1. Phương pháp giải.

- Đưa về phương trình tích: Việc phân tích thành tích có thể có ngay từ một phương trình trong hệ hoặc qua phép biến đổi đại số(phép thế, cộng đại số) ta thu về được phương trình tích.
- Đặt ẩn phụ: Điều quan trọng là ta cần phát hiện ra ẩn phụ. Thường chúng ta cần biến đổi đại số(cộng trừ nhân, chia với mộ số, biểu thức) thì mới xuất hiện ẩn phụ.

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Hệ phương trình có thể đưa về phương trình tích

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 4x^2+1=y^2-4x \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2xy+3x+4y=-6 \\ x^2+4y^2+4x+12y=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+\dfrac{5xy}{x^2+y^2}=2(y+1) \\ (x-1)^2=y(3-5y) \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (x+2)(2y+3)=0 \\ x^2+4y^2+4x+12y=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x^2+4y^2+4x+12y=3 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} 2y+3=0 \\ x^2+4y^2+4x+12y=3 \end{cases}$ (2)

Ta có $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x^2-y^2+2x-4y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y^2+4y+5=0 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{2} \\ x^2-y^2+2x-4y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{2} \\ 4x^2+8x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (2x+1)^2=y^2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm(2x+1) \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

Xét hệ $\begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 7x^2 + 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{5}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{5}{7} \\ y = -\dfrac{3}{7} \end{cases} \end{array}\right.$$

Xét hệ $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ x^2 - x\left(2x + 1\right) + \left(2x + 1\right)^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)$ là $\left(0;1\right),\left(-\dfrac{5}{7};-\dfrac{3}{7}\right),\left(0;-1\right)$ và $\left(-1;1\right)$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $y \neq 0$

Phương trình thứ nhất của hệ phương trình tương đương với

$$x + \frac{5xy}{x^2 + y^2} = 2\left(y + 1\right) \Leftrightarrow x - 2y + \frac{5xy}{x^2 + y^2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + \frac{5xy - 2x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x - 2y + \frac{\left(x - 2y\right)\left(y - 2x\right)}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 2y\right)\left(x^2 + y^2 - 2x + y\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \end{array}\right.$$

Suy ra hệ phương trình tương đương với

$\begin{cases} x = 2y \\ \left(x - 1\right)^2 = y\left(3 - 5y\right) \end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + y = 0 \\ \left(x - 1\right)^2 = y\left(3 - 5y\right) \end{cases}$ (4)

Ta có $\left(3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \left(2y - 1\right)^2 = y\left(3 - 5y\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 9y^2 - 7y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = \dfrac{7 \pm \sqrt{13}}{18} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{9} \\ y = \dfrac{7+\sqrt{13}}{18} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{7-\sqrt{13}}{9} \\ y = \dfrac{7-\sqrt{13}}{18} \end{cases} \text{ (thõa mãn)}$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -y^2 - y \\ 1 - y^2 - y = y(3-5y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -y^2 - y \\ 4y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -y^2 - y \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + \dfrac{3}{4} = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{7+\sqrt{13}}{9};\dfrac{7+\sqrt{13}}{18}\right),\left(\dfrac{7-\sqrt{13}}{9};\dfrac{7-\sqrt{13}}{18}\right),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2 + 3 = xy \\ y^2 + 5x^2 = 4xy + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 + 2y^3 + 2y^2 = 2xy(x+1) \\ 3xy = 2(x^2 - y) \end{cases}$ c) $\begin{cases} \left(2 - \dfrac{1}{2x+y}\right)\sqrt{y} = 2 \\ \left(2 + \dfrac{1}{2x+y}\right)\sqrt{x} = 2 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} xy - x^2 = 3 \\ y^2 + 5x^2 = 4xy + (xy - x^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - x^2 = 3 \\ 6x^2 - 5xy + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - x^2 = 3 \\ (2x-y)(3x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy - x^2 = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} (1) \text{ hoặc } \begin{cases} xy - x^2 = 3 \\ 3x - y = 0 \end{cases} (2)$$

Giải hệ (1): $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -2\sqrt{3} \end{cases}$

Giải hệ (2): $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 3 \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ y = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ y = \dfrac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ y = -\dfrac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$.

b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^3-2y^3-2x^2y+2y\left(y-x\right)=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2y^3-2x^2y+\left(2x^2-3xy\right)(y-x)=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-2y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases} x^2-xy+y^2=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases}$ (4)

Giải hệ (3): $\left(3\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y=8y^2-6y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y^2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Giải hệ (4): Ta có $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=0$ và $x=y=0$ thỏa mãn phương trình thứ hai của (4) do đó hệ phương trình (4) có nghiệm là $x=y=0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)$ là $\left(0;0\right)$ và $\left(2;1\right)$.

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$ và $2x+y\neq 0$

Dễ thấy $x=0$ hoặc $y=0$ thì hệ phương trình vô nghiệm. Xét $xy\neq 0$ ta có

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 1-\frac{1}{2\left(2x+y\right)}=\frac{1}{\sqrt{y}} \quad (*) \\ 1+\frac{1}{2\left(2x+y\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$

Cộng vế với vế ta được $2=\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ (5), trừ vế với vế ta được $-\frac{1}{2x+y}=\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ (6)

Nhân hai vế của phương trình (5) và (6) ta được $-\frac{2}{2x+y}=\left(\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{2x+y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\Leftrightarrow -2xy=\left(x-y\right)\left(2x+y\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+xy-y^2=0\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(2x-y\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x\\ y=2x\end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy chỉ có $y=2x$ thỏa mãn, thay vào (*) ta được

$$1-\frac{1}{8x}=\frac{1}{\sqrt{2x}}\Leftrightarrow 8x-4\sqrt{2}.\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}\\ \sqrt{x}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{4}\quad (VN)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\Rightarrow y=\frac{3+2\sqrt{2}}{4}\text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{3+2\sqrt{2}}{8};\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}\right)$.

Nhận xét: Đây là loại hệ phương trình có thể biến đổi đưa về phương trình đẳng cấp(cùng bậc) từ đó dễ dàng phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2-2y^2+xy+3x+2=0\\ x^2+y^2=x+y\end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3\\ x^2+2xy+9=7x+5y\end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (x-y+1)(x+2y+2)=0\\ x^2+y^2=x+y\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y+1=0\\ x+2y+2=0\end{array}\right.\\ x^2+y^2=x+y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0\\ x^2+y^2=x+y\end{cases}(1)\text{ hoặc }\begin{cases} x+2y+2=0\\ x^2+y^2=x+y\end{cases}(2)$$

Giải hệ (1): $\left(1\right)\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1\\ x^2+\left(x+1\right)^2=x+x+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1\\ 2x^2=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=1\end{cases}$

Giải hệ (2): $\left(2\right)\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-2\\ \left(-2y-2\right)^2+y^2=-2y-2+y\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-2\\ 5y^2+9y+6=0\end{cases}$(vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;1\right)$

b) Cộng hai phương trình của hệ ta có

$2x^2 + y^2 + 3xy - 7x - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y + 2x - 3)(y + x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y + 2x - 3 = 0 \\ y + x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 - 2x \\ y = 2 - x \end{array}\right.$

Suy ra hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y = 2 - x \end{cases}$ (4)

Giải hệ (3): $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x(3 - 2x) + (3 - 2x)^2 = 3 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 9x + 6 = 0 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right. \\ y = 3 - 2\text{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Giải hệ (4): $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x(2 - x) + (2 - x)^2 = 3 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$ và $(2;-1)$

Nhận xét:

+ Để phân tích phương trình một phương trình bậc hai hai ẩn thành tích ta xem một ẩn, ẩn còn lại là tham số từ đó dựa vào ứng dụng của định lí Viét để phân tích.(xem lại phần ứng dụng định lí Viét)

+ Đối với hệ hai phương trình bậc hai hai ẩn mà trong mỗi phương trình không thể phân tích được thành tích(như ở câu b) ta là như sau: ta tìm số thực α sao cho

$x^2 + 2xy - 7x - 5y + 9 + \alpha(x^2 + xy + y^2) = 3\alpha$

$\Leftrightarrow (1 + \alpha)x^2 + (2y + \alpha y - 7)x + \alpha y^2 - 5y + 9 - 3\alpha = 0$ có thể phân tích thành nhân tử. Điều này có được khi

$\Delta_x = (2y + \alpha y - 7)^2 - 4(1 + \alpha)(\alpha y^2 - 5y + 9 - 3\alpha) = (4 - 3\alpha^2)y^2 + (6\alpha - 8)y + 12\alpha^2 - 24\alpha + 13$

là số chính phương hay

$\Delta'_y = (3\alpha - 4)^2 - (4 - 3\alpha^2)(12\alpha^2 - 24\alpha + 13) = 36\alpha^4 - 72\alpha^3 + 72\alpha - 36 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 1$ hoặc $\alpha = -1$. Từ đó ta có lời giải như trên(ngoài ra ta cũng có thể trừ vế với vế).

Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ 2y^2 - 2y + 1 = 3xy \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 + 6y + \sqrt{x - 2y} = \dfrac{x}{y} \\ x(1 - 8y) = x^2 + 2y \end{cases}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x > 0, y \neq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \Leftrightarrow y\sqrt{x} + y^2 = 2x\sqrt{x} + 2xy \Leftrightarrow y^2 + y(\sqrt{x} - 2x) - 2x\sqrt{x} = 0$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo biến y, ta có

$$\Delta_x = (\sqrt{x} - 2x)^2 + 8x\sqrt{x} = x + 4x\sqrt{x} + 4x^2 = (\sqrt{x} + 2x)^2 > 0.$$

Do đó, phương trình này có hai nghiệm là

$$y = \frac{(2x - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 2x)}{2} = -\sqrt{x} \text{ và } y = \frac{(2x - \sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 2x)}{2} = 2x$$

Suy ra hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} y = -\sqrt{x} \\ 2y^2 - 2y + 1 = 3xy \end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases} y = 2x \\ 2y^2 - 2y + 1 = 3xy \end{cases}$ (4)

Ta có $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{x} \\ y^2 + (y-1)^2 = -3x\sqrt{x} \end{cases}$ (vô nghiệm vì $y^2 + (y-1)^2 > 0, -3x\sqrt{x} < 0$)

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2(2x)^2 - 2(2x) + 1 = 3x(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ y = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}; 2+\sqrt{2}\right)$ và $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}; 2-\sqrt{2}\right)$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \geq 2y \\ y \neq 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$6y^2 + y\sqrt{x-2y} - (x-2y) = 0 \Leftrightarrow \left(3y - \sqrt{x-2y}\right)\left(2y + \sqrt{x-2y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3y - \sqrt{x-2y} = 0 \quad (1) \\ 2y + \sqrt{x-2y} = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

- TH1: Với $3y - \sqrt{x-2y} = 0 \Leftrightarrow 3y = \sqrt{x-2y}$: Dễ thấy khi $y < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ta xét $y \geq 0$ ta có $(1) \Leftrightarrow 9y^2 = x - 2y$ kết hợp với phương trình thứ hai của hệ thì

$$\begin{cases} 9y^2 = x - 2y \\ x(1-8y) = x^2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 = x - 2y \\ x^2 + 8xy = 9y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 = x - 2y \\ (x-y)(x+9y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 = x - 2y \\ x - y = 0 \end{cases} (1') \text{ hoặc } \begin{cases} 9y^2 = x - 2y \\ x + 9y = 0 \end{cases} (1'')$$

Hệ phương trình (1') tương đương $\begin{cases} 9y^2 = -y \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\dfrac{1}{9} \end{array}\right. \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = -\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$

Hệ phương trình (1") tương đương $\begin{cases} 9y^2 = -9y - 2y \\ x = -9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -11 \end{array}\right. \\ x = -9y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 99 \\ y = -11 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện suy ra trong trường hợp này hệ phương trình vô nghiệm

- TH2: Với $2y + \sqrt{x - 2y} = 0 \Leftrightarrow -2y = \sqrt{x - 2y}$: Dễ thấy khi $y > 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ta xét $y \leq 0$ ta có $(2) \Leftrightarrow 4y^2 = x - 2y$ kết hợp với phương trình thứ hai của hệ thì

$$\begin{cases} 4y^2 = x - 2y \\ x(1-8y) = x^2 + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = x - 2y \\ x^2 + 8xy = 4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = x - 2y \\ x = -4y \pm 2\sqrt{5}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = x - 2y \\ x = \left(-4 + 2\sqrt{5}\right)y \end{cases} (2') \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 = x - 2y \\ x = \left(-4 - 2\sqrt{5}\right)y \end{cases} (2'')$$

Hệ phương trình (2') tương đương với $\begin{cases} 4y^2 = \left(-6 + 2\sqrt{5}\right)y \\ x = \left(-4 + 2\sqrt{5}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x = \left(-4 + 2\sqrt{5}\right)y \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = 0$ hoặc $\begin{cases} x = 11 - 5\sqrt{5} \\ y = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Hệ phương trình (2") tương đương với $\begin{cases} 4y^2 = \left(-6-2\sqrt{5}\right)y \\ x = \left(-4-2\sqrt{5}\right)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x = \left(-4-2\sqrt{5}\right)y \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = 0$ hoặc $\begin{cases} x = 11+5\sqrt{5} \\ y = -\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện suy ra trong trường hợp này hệ phương trình $\left(11-5\sqrt{5};\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(11+5\sqrt{5};-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $\left(11-5\sqrt{5};\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(11+5\sqrt{5};-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+2xy^2 = 2x^2y+4 \\ x^2+2y^2 = xy+x+2y \end{cases}$.

Lời giải

Nhân phương trình thứ hai với -2 rồi cộng vế với vế với phương trình đầu ta được

$\left(x^3+2xy^2\right)-2\left(x^2+2y^2\right) = \left(2x^2y+4\right)-2\left(xy+x+2y\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^3-2x^2\right)+\left(2xy^2-4y^2\right) = \left(2x^2y-2xy-4y\right)+\left(4-2x\right)$

$\Leftrightarrow x^2\left(x-2\right)+2y^2\left(x-2\right) = y\left(x-2\right)\left(2x+2\right)-2\left(x-2\right)$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x^2-2xy+2y^2-2y+2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left[\left(x-y\right)^2+\left(y-1\right)^2+1\right] = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ (vì $\left(x-y\right)^2+\left(y-1\right)^2+1>0$)

Thay $x=2$ vào phương trình thứ hai ta có

$4+2y^2 = 2y+2+2y \Leftrightarrow 2y^2-4y+2=0 \Leftrightarrow y=1$

Vậy phương trình có nghiệm là $(x;y) = (2;1)$

Nhận xét: Việc nhân vào với -2 được "mò mẫm" như sau: Nhận thấy rằng đối với biến y thấy có sự tương đồng về bậc trong hai phương trình có ở hệ do đó ta nhân với phương trình hai một số thực α khác không rồi cộng vế với vế với phương trình đầu ta được

$\left(x^3+2xy^2\right)+\alpha\left(x^2+2y^2\right)=\left(2x^2y+4\right)+\alpha\left(xy+x+2y\right)$
$\Leftrightarrow\left(2x+2\alpha\right)y^2-\left(2x^2+\alpha x+2\alpha\right)y+x^3+\alpha x^2-\alpha x-4=0$

Ta sẽ chọn α sao cho đúng với mọi y, suy ra $2x+2\alpha=2x^2+\alpha x+2\alpha=x^3+\alpha x^2-\alpha x-4=0$ (*)

Ta có $2x^2+\alpha x+2\alpha=0\Leftrightarrow 2x\left(x+\alpha\right)-\alpha x+2\alpha=0\Rightarrow-\alpha x+2\alpha=0\Rightarrow x=2\Rightarrow\alpha=-2$

Dễ thấy $x=2,\ \alpha=-2$ thỏa mãn (*) do đó ta có lời giải như trên.

Ví dụ 6: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}2x^2+3y=y^2+x+3\\2y^2+8=x^2+x+7y\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^3=8y^3+3y\\x^2+y=4y^2+x\end{cases}$

Lời giải

a) Cộng vế với vế của hai phương trình ta có

$2x^2+3y+2y^2+8=y^2+x+3+x^2+x+7y$

$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+5=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=y-2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Thay $x=1;\ y=2$ vào hệ thấy thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$.

b) Phương trình thứ hai nhân với -3 rồi cộng vế với vế với phương trình thứ nhất ta được

$x^3-3\left(x^2+y\right)=8y^3+3y-3\left(4y^2+x\right)\Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=8y^2-12y^2+3y-1$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^3=\left(2y-1\right)^3\Leftrightarrow x=2y$

Thay vào phương trình thứ hai ta được

$\left(2y\right)^2+y=4y^2+2y\Leftrightarrow y=0\Rightarrow x=0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(0;0\right)$.

Nhận xét: Các biến $x,\ y$ trong mỗi phương trình độc lập với nhau do đó ta sẽ chọn α bằng cách lấy phương trình thứ nhất(hoặc phương trình thứ hai) nhân với α rồi cộng với phương trình thứ hai sao cho đưa về dạng phương trình $\left(ax+b\right)^n=\pm\left(a'y+b'\right)^n$.

Loại 2: Hệ phương trình giải bằng cách đặt ẩn phụ.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 4(x-y) = 1 \\ x^2(x-2)^2 + 2 = (xy-2y)(xy-4x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y = y^2 \\ x^2(x^2+45) = y(y^3-15) \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 2(x^2-2x) - (y^2-4y) = 1 \\ (x^2-2x)^2 - (x^2-2x)(y^2-4y) + 2 = 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = x^2 - 2x \\ b = y^2 - 4y \end{cases}$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 2a - b = 1 \\ a^2 - ab + 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 1 \\ a^2 - a(2a-1) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a-1 \\ a^2 - a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 1 \\ \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} -1 = x^2 - 2x \\ -3 = y^2 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = 3 \end{array}\right. \end{cases}$

Với $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} 2 = x^2 - 2x \\ 3 = y^2 - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0 \\ y^2 - 4y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{3} \\ y = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1),(1;3),(1+\sqrt{3};2+\sqrt{7}),(1+\sqrt{3};2-\sqrt{7}),(1-\sqrt{3};2+\sqrt{7})$ và $(1-\sqrt{3};2-\sqrt{7})$.

b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 3x^2 + y = y^2 \\ y^4 - x^4 = 15(3x^2+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 3x^2 = y \\ y^4 - x^4 = 15y^2 \end{cases}$ (*)

- Với $y = 0$ từ hệ suy ra $x = 0$.
- Với $y \neq 0$ ta có hệ phương trình (*) tương đương với $\begin{cases} y - \dfrac{3x^2}{y} = 1 \\ y^2 - \dfrac{x^4}{y^2} = 15 \end{cases}$

Đặt $\dfrac{x^2}{y} = z$, hệ trở thành $\begin{cases} y - 3z = 1 \\ y^2 - z^2 = 15 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z+1 \\ (3z+1)^2 - z^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z+1 \\ 8z^2 + 6z - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z+1 \\ \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -\dfrac{7}{4} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} y = -\dfrac{17}{4} \\ z = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} y = 4 \\ \dfrac{x^2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} y = -\dfrac{17}{4} \\ z = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} y = -\dfrac{17}{4} \\ \dfrac{x^2}{y} = -\dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{17}{4} \\ x^2 = \dfrac{119}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{17}{4} \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{119}}{4} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(2;4), (-2;4), \left(\dfrac{\sqrt{119}}{4}; -\dfrac{17}{4}\right)$ và $\left(-\dfrac{\sqrt{119}}{4}; -\dfrac{17}{4}\right)$.

Ví dụ 8: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5 \\ (xy-1)^2 = x^2 - y^2 + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 3\sqrt{x+y} \\ 3x + y = 3\sqrt{x-y} \end{cases}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5 \\ x^2y^2 - 1 - x^2 + y^2 = 2xy \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 5 \\ xy - \dfrac{1}{xy} - \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{y}\right)^2 = 5 \\ \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(y - \dfrac{1}{y}\right) = 2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = x + \dfrac{1}{x} \\ b = y - \dfrac{1}{y} \end{cases}$, khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ ab = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 5 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 9 \\ ab = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \pm 3 \\ ab = 2 \end{cases}$

Với hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$ thì a, b là nghiệm của phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$

Do đó hệ có nghiệm $(a;b)$ là $(2;1)$ và $(1;2)$

Với hệ phương trình $\begin{cases} a + b = -3 \\ ab = 2 \end{cases}$ thì a, b là nghiệm của phương trình $X^2 + 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -1 \\ X = -2 \end{array}\right.$

Do đó hệ có nghiệm $(a;b)$ là $(-2;-1)$ và $(-1;-2)$

Vì $|a| = \left|x + \dfrac{1}{x}\right| = |x| + \left|\dfrac{1}{x}\right| \geq 2$ nên chỉ còn hai trường hợp sau

TH1: $(a;b) = (2;1)$ khi đó ta có $\begin{cases} 2 = x + \dfrac{1}{x} \\ 1 = y - \dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Do đó hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x;y)$ là $\left(1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(1; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

TH2: $(a;b) = (-2;-1)$ khi đó ta có $\begin{cases} -2 = x + \dfrac{1}{x} \\ -1 = y - \dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Do đó hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x;y)$ là $\left(-1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(-1; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x;y)$ là $\left(1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(1; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(-1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(-1; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+y} = a \\ \sqrt{x-y} = b \end{cases}$, $a \geq 0, b \geq 0$ khi đó $2a^2 + b^2 = 3x + y$, $a^2 + 2b^2 = 3x - y$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3a \ (1) \\ 2a^2 + b^2 = 3b \ (2) \end{cases}$

Trừ vế với vế của hai phương trình (1) và (2) ta được

$b^2 - a^2 = 3(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(3+a+b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b-3 \end{array}\right.$

Với $a = b$ thay vào phương trình (1) suy ra $3a^2 = 3a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a = 1 \Rightarrow b = 1 \end{array}\right.$

Với $a = -b - 3$ thay vào phương trình (1) suy ra $(-b-3)^2 + b^2 = 3b \Leftrightarrow 2b^2 - 3b + 9 = 0$ (vô nghiệm)

TH1: $a = b = 0$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

TH2: $a = b = 1$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 1 \\ \sqrt{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$ và $(1;0)$

Ví dụ 9: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 5(x^2+y^2) = 6xy + 2 \\ 2x^2 + 3x = 2y^2 + y + 3 \end{cases}$.   b) $\begin{cases} 5(x^2+y^2) = y - 2x \\ 3(x^2+y^2) + 2x = y + 8xy \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (x+y)^2 + [2(x-y)]^2 = 2 \\ (x+y) + 2(x-y) + (x+y)2(x-y) = 3 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = x+y \\ b = 2(x-y) \end{cases}$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a + b + ab = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ a + b + ab = 3 \end{cases}$ (*)

Đặt $\begin{cases} a + b = S \\ ab = P \end{cases}$, $S^2 \geq 4P$ khi đó hệ phương trình (*) trở thành $\begin{cases} S^2 - 2P = 2 \\ S + P = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(3-S) = 2 \\ P = 3 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 8 = 0 \\ P = 3 - S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} S = 2 \\ S = -4 \end{array}\right. \\ P = 3 - S \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$ (thỏa mãn) hoặc $\begin{cases} S = -4 \\ P = 7 \end{cases}$ (loại)

Với $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \end{cases}$ suy ra a, b là nghiệm của phương trình $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1$

Do đó hệ phương trình (*) có nghiệm là $(a;b) = (1;1)$

Suy ra $\begin{cases} 1 = x + y \\ 1 = 2(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm là $(x;y) = \left(\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (3x+y)^2 + (x-3y)^2 + (3x+y) + (x-3y) = 0 \\ 2(3x+y)(x-3y) + (3x+y) + (x-3y) = 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} 3x + y = a \\ x - 3y = b \end{cases}$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a^2 + b^2 + a + b = 0 \\ 2ab + (a+b) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 0 \\ 2ab + (a+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a^2 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a = b = 1 \end{array}\right.$

Với $a = b = 0$ ta có $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Với $a = b = 1$ ta có $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$ và $\left(\dfrac{2}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.62: Giải các hệ phương trình sau.

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y} = \sqrt[3]{x+y} \\ \sqrt{x-y} = \sqrt[3]{x-y-12} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$

Bài 3.63: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} = 4 \end{cases}$ c)

$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y} = 4 \end{cases}$

Bài 3.64: Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y} = 4 \\ x^2+y^2 = 128 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(x+y) = 3(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$

Bài 3.65: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-1} = a \\ x+y = 2a+1 \end{cases}$

Bài 3.66: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x^2-xy+y^2 = 3\left(x-y\right) \\ x^2+xy+y^2 = 7\left(x-y\right)^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3y+xy^2+x^2+y+xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4+2x^2y+y^2+xy = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Bài 3.67: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} xy+x+1 = 7y \\ x^2y^2+xy+1 = 13y^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y(1+2x^3y) = 3x^6 \\ 1+4x^6y^2 = 5x^6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-2xy+x+y = 0 \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Bài 3.68: Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x^3+3xy^2 = 6xy-3x-49 \\ x^2-8xy+y^2 = 10y-25x-9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3-y^3 = 35 \\ 2x^2+3y^2 = 4x-9y \end{cases}$

Bài 3.69: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[4]{x}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt[4]{y}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right)=1 \end{cases}$