- **DẠNG TOÁN 4: PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO.**

Loại 1: Đưa về phương trình tích.

1. Phương pháp giải

Để giải phương trình $f\left(x\right)=0$ ta phân tích $f\left(x\right)=f_1\left(x\right).f_2\left(x\right)...f_n\left(x\right)$ khi đó

$$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f_1\left(x\right)=0\\f_2\left(x\right)=0\\....\\f_n\left(x\right)=0\end{array}\right.$$

Để đưa về một phương trình tích ta thường dùng các cách sau:

- Sử dụng các hằng đẳng thức đưa về dạng $a^2-b^2=0,\ a^3-b^3=0,...$
- Nhẩm nghiệm rồi chia đa thức: Nếu $x=a$ là một nghiệm của phương trình $f(x)=0$ thì ta luôn có sự phân thích: $f(x)=(x-a)g(x)$.

* Để dự đoán nghiệm ta chú ý các kết quả sau:

Cho đa thức $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$

+ Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước của a_0.

+ Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng không thì phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm bằng 1.

+ Nếu đa thức có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm bằng -1.

* Để phân tích $f(x)$ ta sử dụng lược đồ Hooc-ne như sau:

Nếu $f(x)$ có nghiệm là $x=x_0$ thì $f(x)$ chứa nhân tử $\left(x-x_0\right)$ tức là :

$f\left(x\right)=\left(x-x_0\right).g\left(x\right)$, trong đó $g\left(x\right)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ ...\ +\ b_1x+b_0$

Với hệ số b_i được xác định như sau:

Lược đồ Hoócne

	a_n	a_{n-1}	....	a_1	a_0
a	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a.a_n+a_{n-1}$	....	$b_1=a.a_2+a_1$	0

Ví dụ : Giải phương trình $x^4+x^3-x-1=0$

Nhận thấy : $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1+1+0+\left(-1\right)+\left(-1\right)=0$

Và : $a_4+a_2+a_0=1+0+\left(-1\right)=a_3+a_1=1+\left(-1\right)$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1=1,x_2=-1$

Lược đồ Hoócne

	1	1	0	-1	-1
$x=1$	1	2	2	1	0
$x=-1$	1	1	1	0	

Ta có phương tình thương đương với $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

- Sử dụng phương pháp hệ số bất định

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau.

a) $x^3-3x^2-6x+8=0$ b) $3x^5-13x^4+16x^3+5x^2-21x+6=0$.

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $(x+2)(x^2-5x+4)=0$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-2, x=1$ và $x=4$

b) Phương tình tương đương với $(x+1)(3x^4-16x^3+32x^2-27x+6)=0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(3x^3-10x^2+12x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x-2)(x+1)(x^2-3x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1, x=\dfrac{1}{3}$ và $x=2$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$

Lời giải

Đối với phương trình này ta không nhẩm được nghiệm nguyên hay hữu tỉ

Bây giờ ta giả sử phương trình trên phân tích được thành dạng

$$(x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)=0$$
$$\Leftrightarrow x^4+(a_1+a_2)x^3+(a_1a_2+b_1+b_2)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+b_1b_2=0$$

Đồng nhất các hệ số ta có $\begin{cases} a_1 + a_2 = -4 \\ a_1a_2 + b_1 + b_2 = -10 \\ a_1b_2 + a_2b_1 = 37 \\ b_1b_2 = -14 \end{cases}$

Suy ra $b_1 = -2; b_2 = -7; a_1 = -5; a_2 = 1$

Do đó phương trình tương đương với $\left(x^2 - 5x + 2\right)\left(x^2 + x - 7\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 2 = 0 \\ x^2 + x - 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ và $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$

Ví dụ 3: Giải các phường trình sau:

a) $x^4 - 4x^2 + 12x - 9 = 0$ b) $x^4 - 4x = 1$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $x^4 - (2x - 3)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x = -3$

b) Phương trình tương đương với $x^4 - 2x^2 + 1 - 2(x^2 - 2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - [\sqrt{2}(x - 1)]^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1)(x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1 = 0 \\ x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{\sqrt{2} + 3}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{3 - \sqrt{2}}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \{\dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{\sqrt{2} + 3}}{2}; \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{3 - \sqrt{2}}}{2}\}$

Nhận xét: Đây là phương trình đưa về được dạng $\left(x^2 + \alpha\right)^2 = a\left(x + \beta\right)^2$

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $x^3 - \left(2m + 5\right)x^2 + \left(m^2 + 6m + 7\right)x - 3m^2 - 3 = 0$(*) có ba nghiệm dương phân biệt.

Lời giải

Nhẩm nghiệm ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x = 3$ do đó dùng lược đồ hoócne ta có

$$(*) \Leftrightarrow (x-3)\left[x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = 3 \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 1 = 0 \ (**) \end{array}\right.$$

Phương trình (*) có ba nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm dương phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ 3^2 - 2(m+1).3 + m - 2 \neq 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - m^2 - 1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ m^2 + 1 > 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Vậy $m > 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.39: Giải các phương trình sau:

a) $2x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 8x + 4 = 0$ b) $-12 + 20x + 19x^2 - 21x^3 - 4x^4 + 4x^5 = 0$

c) $-6 + x - 5x^2 + x^3 + x^4 = 0$ d) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x - 4 = 0$

Bài 3.40: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ b) $x^4 - x^2 - 2x - 1 = 0$

Bài 3.41: Tìm m để phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 + m + 1)x - m^2 + m - 1 = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

Loại 2: Đặt ẩn phụ.

1. Phương pháp giải:

Điểm quan trọng nhất trong đối với phương trình dạng này là phát hiện ẩn phụ $t = f(x)$ có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác 0.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$ b) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$

Lời giải

a) Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được: $2(x^2+\frac{1}{x^2})-5(x+\frac{1}{x})+6=0$.

Đặt $t=x+\frac{1}{x}, \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=t^2-2$

Ta có phương trình: $2(t^2-2)-5t+6=0 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

* $t=\frac{1}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-x+2=0$ (vô nghiệm).

* $t=2 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

b) Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được: $2x^2-21x+74-\frac{105}{x}+\frac{50}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2(x^2+\frac{25}{x^2})-21(x+\frac{5}{x})+74=0$.

Đặt $t=x+\frac{5}{x}, \Rightarrow x^2+\frac{25}{x^2}=(x+\frac{5}{x})^2-10=t^2-10$

Ta có phương trình: $2(t^2-10)-21t+74=0 \Leftrightarrow 2t^2-21t+54=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=\frac{9}{2} \end{array}\right.$

* $t=\frac{9}{2} \Rightarrow x+\frac{5}{x}=\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2-9x+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.(thỏa mãn)

* $t=6 \Rightarrow x+\frac{5}{x}=6 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \left\{1;2;\frac{5}{2};5\right\}$.

Chú ý: Các phương trình trên có dạng tổng quát là $ax^4+bx^3+cx^2+dx \pm e=0$ với $\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2=k^2$. Tức là có dạng $ax^4+bx^3+cx^2 \pm bkx+ak^2=0$.

Cách giải: Xét $x=0$ xem có phải là nghiệm của phương trình không

Với $x \neq 0$ ta chia hai vế phương trình cho x^2 ta có pt: $a(x^2+\frac{k^2}{x^2})+b(x\pm\frac{k}{x})+c=0$

Đặt $t=x\pm\frac{k}{x}$, ta có $x^2+\frac{k^2}{x^2}=(x\pm\frac{k}{x})^2\mp 2k=t^2\mp 2k$ thay vào phương trình ta quy về phương trình bậc hai $a(t^2\mp 2k)+bt+c=0$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$ b) $4\left(x+5\right)\left(x+6\right)\left(x+10\right)\left(x+12\right)=3x^2$

Lời giải

a) Phương rình tương đương với $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=24$.

Đặt $t=x^2+3x$, phương trình trở thành

$t(t+2)=24 \Leftrightarrow t^2+2t-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-6 \\ t=4 \end{array}\right.$

* $t=-6 \Rightarrow x^2+3x=-6 \Leftrightarrow x^2+3x+6=0$ (Phương trình vô nghiệm)

* $t=4 \Rightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Vậy phương rình có nghiệm là $x=-4$ và $x=1$.

b) Phương trình tương đương với $4\left(x^2+17x+60\right)\left(x^2+16x+60\right)=3x^2$ (*)

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$, chia hai vế cho x^2 ta có

$\left(*\right) \Leftrightarrow 4\left(x+17+\frac{60}{x}\right)\left(x+16+\frac{60}{x}\right)=3$

Đặt $y=x+16+\frac{60}{x}$ phương trình trở thành

$4\left(y+1\right)y=3 \Leftrightarrow 4y^2+4y-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $y=\frac{1}{2}$ ta có $x+16+\frac{60}{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2+31x+120=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-8 \\ x=-\frac{15}{2} \end{array}\right.$

Với $y=-\dfrac{3}{2}$ ta có $x+16+\dfrac{60}{x}=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2x^2+35x+120=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-8$, $x=-\dfrac{15}{2}$ và $x=\dfrac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$.

Chú ý:

- Phương trình có dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e$ trong đó $a+b=c+d$

Cách giải: Đặt $t=x^2+(a+b)x$ ta quy về phương trình bậc hai $(t+ab)(t+cd)=e$

- Phương trình có dạng $\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)\left(x+d\right)=mx^2$ trong đó $ab=cd$

Cách giải: Kiểm tra xem $x=0$ có là nghiệm của phương trình hay không.

Xét $x\neq 0$ chia hai vế cho x^2 ta được $\left(x+a+b+\dfrac{ab}{x}\right)\left(x+c+d+\dfrac{cd}{x}\right)=m$

Đặt $t=x+\dfrac{ab}{x}$ ta quy về phương trình bậc hai $\left(t+a+b\right)\left(t+c+d\right)=m$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^4+(x+3)^4=2$

b) $3(x^2-x+1)^2-2(x+1)^2=5(x^3+1)$

Lời giải

a) Đặt $x=t-2$ phương trình trở thành

$(t-1)^4+(t+1)^4=2\Leftrightarrow t^4+6t^2=0\Leftrightarrow t^2\left(t^2+6\right)=0\Leftrightarrow t=0$

Suy ra $x=-2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2$.

b) Vì $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế cho x^3+1 ta được:

$$3\frac{x^2-x+1}{x+1}-2\frac{x+1}{x^2-x+1}=5.$$

Đặt $t=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$, phương trình trở thành

$$3t-\frac{2}{t}=5\Leftrightarrow 3t^2-5t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

* $t=2\Rightarrow\dfrac{x^2-x+1}{x+1}=2\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

* $t=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{x^2-x+1}{x+1}=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3x^2-2x+4=0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

Chú ý: Phương trình ở câu a) có dạng $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$.

Cách giải: Đặt $x = t - \dfrac{a+b}{2}$ ta đưa về phương trình trùng phương

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow c \geq 2(\dfrac{a-b}{2})^4$

Ví dụ 4: Cho phương trình $\left(m+1\right)x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ (*). Tìm m để

a) Phương trình (*) có nghiệm

b) Phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt

Lời giải

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, phương trình trở thành

$\left(m+1\right)t^2 - 4t + 1 = 0$ (*)

a) Với $m = -1$ phương trình (*) trở thành $-4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$ suy ra $m = -1$ thì phương trình (*) có nghiệm

Với $m \neq -1$ phương trình (**) là phương trình bậc hai.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm không âm

- TH1: Phương trình (**) có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \left(m+1\right) \geq 0 \\ \dfrac{4}{m+1} \geq 0 \\ \dfrac{1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} m \leq 3 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3$$

- TH2: Phương trình (**) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m+1} < 0 \Leftrightarrow m < -1$
- TH3: Phương trình (**) có một nghiệm bằng không và một nghiệm âm(không xảy ra vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (**) với mọi m)

Vậy phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq 3$.

b) Với $m = -1$ phương trình (*) trở thành $-4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$ suy ra $m = -1$ không thỏa mãn

Với $m \neq -1$ phương trình (**) là phương trình bậc hai.

Phương trình (*) bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-(m+1) > 0 \\ \dfrac{4}{m+1} > 0 \\ \dfrac{1}{m+1} > 0 \end{cases} \begin{cases} m < 3 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3$$

Vậy phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m < 3$.

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + m = 0$

a) Giải phương trình khi $m = 6$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

Lời giải

Phương trình tương đương $\left(x^4 + 4x^3 + 4x^2\right) - \left(7x^2 + 14x\right) + m = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + 2x\right)^2 - 7\left(x^2 + 2x\right) + m = 0$

Đặt $t = x^2 + 2x$, $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \ge -1$ suy ra $t \ge -1$

Phương trình trở thành $t^2 - 7t + m = 0$ (*)

a) Khi $m = 6$ ta có $t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 6 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì $x^2 + 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$

Với $t = 6$ thì $x^2 + 2x = 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{7}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -1 \pm \sqrt{2}$ và $x = -1 \pm \sqrt{7}$.

b) Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $t \ge -1$

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y = t^2 - 7t + m$ trên $[-1;+\infty)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Xét hàm số $y = t^2 - 7t + m$ trên $[-1;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	7	$+\infty$
y	$8+m$ $\searrow$	m	$\nearrow$ $+\infty$

Suy ra để phương trình có nghiệm là $m \le 0$.

Chú ý: Phương trình trên là phương trình có thể đưa về dạng $A\left(x^2+ax\right)^2+B\left(x^2+ax\right)+C=0$ và cách giải là đặt $t=x^2+ax$ và đưa về phương trình bậc hai $At^2+Bt+C=0$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.42: Giải các phương trình sau

a) $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$ b) $x^6+3x^5-6x^4-21x^3-6x^2+3x+1=0$

b) $\left(x+3\right)^4+\left(x-5\right)^4=1312$ c) $\left(2x-1\right)\left(4x+5\right)\left(8x+3\right)\left(16x-15\right)=99x^2$

d) $x^4-9x^2-2x+15=0$ e) $2\left(x^2-x+1\right)^2+5\left(x+1\right)^2=11\left(x^3+1\right)$.

Bài 3.43: Tìm m để phương trình : $(x^2-1)(x+3)(x+5)=m$ có nghiệm.

Bài 3.44: Tìm m để phương trình : $x^4-4x^3+8x=m$ có bốn nghiệm phân biệt.