DẠNG TOÁN 3: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ CHỨNG MINH BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO BIẾN.

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh đẳng thức lượng giác ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt các công thức lượng giác.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

a) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\cos 4\alpha}{4}$

b) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \dfrac{5}{8} + \dfrac{3}{8}\cos 4\alpha$

c) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \cot^2(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$

Lời giải

a) Ta có $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

$$= 1 - \frac{1-\cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$$

b) Ta có

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$$

$$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}\left(2\sin\alpha\cos\alpha\right)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha=1-\frac{3}{8}\left(1-\cos4\alpha\right)$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4\alpha$$

c) Ta có $\dfrac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2}{\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right)^2}$

$$=\frac{\left[\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{\left[\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}=\frac{2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\cot^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

Ví dụ 2: Cho $0<\alpha<\pi,\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}=2\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $\dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Lời giải

a) Do $0<\alpha<\pi$ nên $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)>0,\sin\alpha>0$

Đẳng thức tương đương với

$\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)^2=4\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1+\cos\alpha}\sqrt{1-\cos\alpha}=2\left[1-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $VT=\dfrac{\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}\right)\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)}$

$$=\frac{2+2\sqrt{1+\cos\alpha}.\sqrt{1-\cos\alpha}}{2\cos\alpha}=\frac{1+\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{1+\left|\sin\alpha\right|}{\cos\alpha}$$

Vì $0<\alpha<\pi$ nên $\sin\alpha>0$ do đó

$$VT=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=VP\Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng

a) $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

b) $\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=2$ với $\sin\alpha+\sin\beta=3\sin\ \ \alpha+\beta\ \ ,\alpha+b\neq k2\pi$

c) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta\cos\ \ \alpha+\beta}{\cos\alpha-\sin\beta\sin\ \ \alpha+\beta}=\tan\ \ \alpha+\beta$

Lời giải

a) Ta có $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}\left[\cos2\alpha-\cos2\beta\right]$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ 1-2\sin^2\alpha\ \ -\ \ 1-2\sin^2\beta\ \ \right]=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

b) Từ giả thiết ta có $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=6\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Do $\alpha+\beta\neq k2\pi\Rightarrow\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\neq0$ suy ra $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=3\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=3\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

$\Leftrightarrow \cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=2 \Rightarrow$ ĐPCM

c) Ta có $VT=\dfrac{\sin\alpha+\frac{1}{2}\left[\sin\ \ \alpha+2\beta\ \ +\sin\ \ -\alpha\ \ \right]}{\cos\alpha-\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\ \ \alpha+2\beta\ \ -\cos\ \ -\alpha\ \ \right]}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\ \ \alpha+2\beta}{\cos\alpha+\cos\ \ \alpha+2\beta}$

$=\dfrac{2\sin\ \ \alpha+\beta\ \ \cos\ \ -\beta}{2\cos\ \ \alpha+\beta\ \ \cos\ \ -\beta}=\tan\ \ \alpha+\beta\ \ =VP \Rightarrow$ ĐPCM

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$

b) $B=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)$

Lời giải

a) Ta có: $A=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left[3+\cos2\alpha+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2\alpha\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\alpha\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[3+\cos2\alpha+2\cos\frac{4\pi}{3}\cos2\alpha\right]=\frac{3}{2}$$

b) Vì $\alpha+\frac{\pi}{6}=\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ và $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ nên

$$B=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

Ví dụ 5: Đơn giản biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{\cos a+2\cos 2a+\cos 3a}{\sin a+\sin 2a+\sin 3a}$

b) $B=\dfrac{\cos\left(a+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cot a-\cot\dfrac{a}{2}}$

c) $C=\cos a+\cos(a+b)+\cos(a+2b)+...+\cos(a+nb)$ $(n\in \mathbb{N})$

Lời giải

a) $A=\dfrac{(\cos a+\cos 3a)+2\cos 2a}{(\sin a+\sin 3a)+2\sin 2a}=\dfrac{2\cos 2a\cos a+2\cos 2a}{2\sin 2a\cos a+2\sin 2a}=\dfrac{2\cos 2a(\cos a+1)}{2\sin 2a(\cos a+1)}=\cot 2a$

b) Ta có $\cos\left(a+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cos a\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos a$ và

$$\cot a-\cot\frac{a}{2}=\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{a}{2}\cos a-\cos\frac{a}{2}\sin a}{\sin a\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{a}{2}-a\right)}{\sin a\sin\frac{a}{2}}=\frac{-\sin\frac{a}{2}}{\sin a\sin\frac{a}{2}}=-\frac{1}{\sin a}$$

Suy ra $B=\dfrac{\cos a}{-\dfrac{1}{\sin a}}=-\sin a\cos a=-\dfrac{\sin 2a}{2}$.

c) Ta có $C.2\sin\dfrac{b}{2}=2\sin\dfrac{b}{2}\cos a+2\sin\dfrac{b}{2}\cos(a+b)+2\sin\dfrac{b}{2}\cos(a+2b)+...+2\sin\dfrac{b}{2}\cos(a+nb)$

$$=\sin\left(\frac{b}{2}+a\right)+\sin\left(\frac{b}{2}-a\right)+\sin\left(\frac{3b}{2}+a\right)+\sin\left(-\frac{b}{2}-a\right)+\sin\left(\frac{5b}{2}+a\right)+\sin\left(-\frac{3b}{2}-a\right)$$

$$+...+\sin\left(\frac{(2n+1)b}{2}+a\right)+\sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2}-a\right)$$

$$\sin\left(\frac{b}{2}-a\right)+\sin\left(\frac{(2n+1)b}{2}+a\right)=2\sin(n+1)b\cos\left(\frac{nb}{2}-a\right)$$

Suy ra $C=\dfrac{\sin(n+1)b\cos\left(\dfrac{nb}{2}-a\right)}{\sin\dfrac{b}{2}}$

Ví dụ 6: Cho $\sin(a+b)=2\cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M=\dfrac{1}{2-\sin 2a}+\dfrac{1}{2-\sin 2b}$ không phụ thuộc vào a,b.

Lời giải

Ta có $M=\dfrac{4-(\sin 2a+\sin 2b)}{(2-\sin 2a)(2-\sin 2b)}=\dfrac{4-(\sin 2a+\sin 2b)}{4-2(\sin 2a+\sin 2b)+\sin 2a\sin 2b}$

Ta có $\sin 2a+\sin 2b=2\sin(a+b)\cos(a-b)$

Mà $\sin(a+b)=2\cos(a-b)\Rightarrow \sin^2(a+b)=4\cos^2(a-b)$ nên

$\cos 2(a+b)-\cos 2(a-b)=1-2\sin^2(a+b)-\left[2\cos^2(a-b)-1\right]$

$=2-2\left[\sin^2(a+b)+\cos^2(a-b)\right]=2-10\cos^2(a-b)$

Suy ra $M=\dfrac{4-4\cos^2(a-b)}{4-8\cos^2(a-b)-\frac{1}{2}.\left[2-10\cos^2(a-b)\right]}=\dfrac{4-4\cos^2(a-b)}{3-3\cos^2(a-b)}=\dfrac{4}{3}$

Ví dụ 7: Chứng minh rằng

a) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=4\sin\alpha.\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$

b) $\sin^3\dfrac{\alpha}{3}+3\sin^3\dfrac{\alpha}{3^2}+\ldots+3^{n-1}\sin^3\dfrac{\alpha}{3^n}=\dfrac{1}{4}\left(3^n\sin\dfrac{\alpha}{3^n}-\sin\alpha\right).$

Lời giải

a) Ta có $\sin 3\alpha=\sin\ \ 2\alpha+\alpha\ \ =\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\ \ 1-\sin^2\alpha\ \ +\ \ 1-2\sin^2\alpha\ \ \sin\alpha$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\quad(1)$

Mặt khác $4\sin\alpha.\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=-4\sin\alpha.\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}-\cos\ \ -2\alpha\ \ \right)$

$=-2\sin\alpha.\left(-\dfrac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=2\sin\alpha\left(\dfrac{1}{2}+1-2\sin^2\alpha\right)$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM

b) Theo câu a) ta có $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \Rightarrow \sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$

Do đó $\sin^3\dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3} - \sin\alpha}{4}$, $\sin^3\dfrac{\alpha}{3^2} = \dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^2} - \sin\dfrac{\alpha}{3}}{4}$, ..., $\sin^3\dfrac{\alpha}{3^n} = \dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^n} - \sin\dfrac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$

Suy ra $VT = \dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3} - \sin\alpha}{4} + 3\dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^2} - \sin\dfrac{\alpha}{3}}{4} + ... + 3^{n-1}\dfrac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^n} - \sin\dfrac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$

$$= -\frac{\sin\alpha}{4} + 3^{n-1}\frac{3\sin\dfrac{\alpha}{3^n}}{4} = \frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n} - \sin\alpha\right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

Lưu ý: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, hai công thức này được gọi là công thức nhân ba

3. Các bài tập luyện tập.

Bài 6.40: Chứng minh rằng

a) $\sin^4\alpha = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 2\alpha + \dfrac{1}{8}\cos 4\alpha$

b) $\sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16} = \dfrac{3}{2}$

Bài 6.41: Cho $\sin x = 2\sin\left(x+y\right), x+y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Chứng minh $\tan\left(x+y\right) = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2}$.

Bài 6.42: Chứng minh các hệ thức sau:

a) $4\left(\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha\right) = \sin 4\alpha$

b) $\tan x + \tan y = \dfrac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

c) $\tan x.\tan 3x = \dfrac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x.\tan^2 x}$

Bài 6.43: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x:

a) $A=\sqrt{4\sin^4 x+\sin^2 2x}+4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ với $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$

b) $B=4\cos^4 x+\cos^2 2x-4\cos^2 x\cos 2x$

c) $C=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

Bài 6.44: Đơn giản biểu thức sau:

a) $A=\frac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$

b) $B=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}$ $(0<\alpha\le\pi)$

c) $C=\frac{\cos a-\cos 3a+\cos 5a-\cos 7a}{\sin a+\sin 3a+\sin 5a+\sin 7a}$

d) $D=\cos a-\frac{\cos\left(2a-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos a}$

Bài 6.45: Chứng minh các hệ thức sau:

a) Nếu $2\tan a=\tan(a+b)$ thì $\sin b=\sin a.\cos(a+b)$

b) Nếu $2\tan a=\tan(a+b)$ thì $3\sin b=\sin(2a+b)$

c) Nếu $\tan(a+b).\tan b=-3$ thì $\cos(a+2b)+2\cos a=0$

d) Nếu $3\sin(a+b)=\cos(a-b)$ thì $8\sin^2(a+b)=\cos 2a\cos 2b$

Bài 6.46: Chứng minh rằng $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

Bài 6.47: Chứng minh rằng

a) $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$.

b) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ ...\ \cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

Bài 6.48: Chứng minh rằng: a) $\frac{1}{\sin x}=\cot\frac{x}{2}-\cot x$.

b) $\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}+...+\frac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha}=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot 2^{n-1}\alpha$ $(2^{n-1}\alpha\ne k\pi)$

Bài 6.49: Chứng minh rằng a) $\tan x=\cot x-2\cot 2x$

b) $\frac{1}{2}.\tan\frac{a}{2}+\frac{1}{2^2}.\tan\frac{a}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}.\tan\frac{a}{2^n}=\frac{1}{2^n}.\cot\frac{a}{2^n}-\cot a$

Bài 6.50: Chứng minh rằng nếu $x\ne\frac{k\pi}{6},k\in Z$ thì $\frac{\tan 3x}{\tan x}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

Áp dụng tính $A=\tan 6^o\tan 54^o\tan 66^o$.

Bài 6.51: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin 1^0 \sin 2^0}+\frac{1}{\sin 2^0 \sin 3^0}+...+\frac{1}{\sin (n-1)^0 \sin n^0}=\cot 1^0-\cot n^0$$

Bài 6.52: Chứng minh rằng $2\sin 2^0+4\sin 4^0+...+178\sin 178^0=90\cot 1^0$