DẠNG 3: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức liên quan đến các yếu tố của tam giác, tứ giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một vế hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, bunhiacôpxki,…)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B.\sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R}.\frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-bc}{2bc} \geq \frac{2bc-bc}{2bc} = \frac{1}{2}$ đpcm

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Lời giải (hình 2.9)

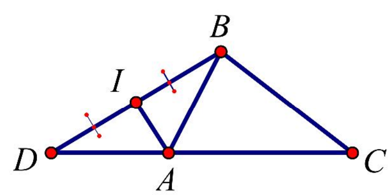
a) Trên tia đối của tia AC lấy D thỏa $AD = AB = c$ suy ra tam giác BDA cân tại A và $BDA = \frac{1}{2}A$.

Áp dụng định lý hàm số Côsin cho ΔABD, ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos BAD \\ &= 2c^2 - 2c^2.\cos(180^0 - A) \\ &= 2c^2(1+\cos A) = 2c^2\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{c}{b}(a+b+c)(b+c-a) = \frac{4c}{b}p(p-a) \end{aligned}$$

Suy ra

$BD = 2\sqrt{\frac{cp(p-a)}{b}}$



Hình 2.9

Gọi I là trung điểm của BD suy ra $AI \perp BD$.

Trong tam giác ADI vuông tại I, ta có

$\cos\frac{A}{2} = \cos ADI = \frac{DI}{AD} = \frac{BD}{2c} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

Vậy $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

b) Từ định lý hàm số sin, ta có: $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{p}{R}$ (1)

Theo câu a) ta có $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, tương tự thì $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$ và

$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$,

kết hợp với công thức $S=\sqrt{p\quad p-a\quad p-b\quad p-c}=\frac{abc}{4R}$

Suy ra $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

$=\frac{4p}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{4pS}{abc}=\frac{p}{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Nhận xét: Từ câu a) và hệ thức lượng giác cơ bản ta suy ra được các công thức

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; $\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$

***Ví dụ 3**:* Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

b) $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$

Lời giải:

a) Áp dụng định lí côsin và công thức $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ ta có:

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$ đpcm

b) Theo câu a) tương tự ta có $\cot B=\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$, $\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

Suy ra $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S}+\frac{c^2+a^2-b^2}{4S}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $p-a\quad p-b\quad p-c\leq\left(\frac{3p-a-b-c}{3}\right)^3=\left(\frac{p}{3}\right)^3$

Mặt khác $S=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}\Rightarrow S\le\sqrt{p\frac{p^3}{27}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$

Ta có $p^2=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{4}\le\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4}$ suy ra $S\le\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

Do đó $\cot A+\cot B+\cot C\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{4.\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$ đpcm.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2+c^2=5a^2$.

Lời giải:
Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2+GC^2=BC^2\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2=a^2\ (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4},\ m_c^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

Suy ra $(*)\Leftrightarrow\frac{4}{9}\left(m_b^2+m_c^2\right)=a^2$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{9}\left[\frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}+\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}\right]=a^2\Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2=9a^2\Leftrightarrow b^2+c^2=5a^2$$

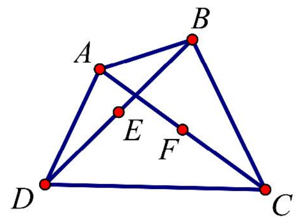
(đpcm)

Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD có E, F là trung điểm các đường chéo. Chứng minh :
$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$

Lời giải (hình 2.10)
Áp dụng công thức đường trung tuyến với tam giác ABC và ADC ta có:

$$AB^2+BC^2=2BE^2+\frac{AC^2}{2}\ (1)$$

$$CD^2+DA^2=2DE^2+\frac{AC^2}{2}\ (2)$$



Hình 2.10

Từ (1) và (2) suy ra
$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\left(BE^2+DE^2\right)+AC^2$

Mặt khác EF là đường trung tuyến tam giác BDF nên $BE^2+DE^2=2EF^2+\frac{BD^2}{2}$

Suy ra $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.68: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;
a) $a=b.\cos C+c.\cos B$ b) $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$

c) $h_a = 2R\sin B\sin C$ d) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

e) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2 - \ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ ^2}$

Bài 2.69: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $b + c = 2a \Leftrightarrow \dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

b) Góc A vuông $\Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$

Bài 2.70: Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh rằng

a) Tam giác ABC nhọn

b) $2\sin^2 A = \tan B\tan C$

Bài 2.71: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu $\cot A = \dfrac{1}{2}\ \cot B + \cot C$ thì

$b^2 = \dfrac{1}{2}\ a^2 + c^2$.

Bài 2.72: Gọi S là diện tích tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

b) $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Bài 2.73: Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi α là góc hợp bởi hai đường chép AC và BD. Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$.

Bài 2.74: Cho tam giác ABC có $BAC = 120^0$, AD là đường phân giác trong (D thuộc BC). Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$

Bài 2.75: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\dfrac{\cos A + \cos B}{a + b} = \dfrac{b + c - a\quad c + a - b}{2abc}$

b) $c^2 + b^2 - a^2\ \tan A = \ c^2 + a^2 - b^2\ \tan B$

Bài 2.76. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Chứng minh rằng

a) $h_a \le \sqrt{p(p - a)}$

b) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le R^2(a + b + c)^2$

Bài 2.77. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$\sqrt{r^2 + \ p - a\ ^2} + \sqrt{r^2 + \ p - b\ ^2} + \sqrt{r^2 + \ p - c\ ^2} \le \sqrt{ab + bc + ca}$

Bài 2.78. Cho tam giác ABC. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng

$r = (p - a)\tan\dfrac{A}{2} = (p - c)\tan\dfrac{B}{2} = (p - c)\tan\dfrac{C}{2}$.

Bài 2.79. Cho tam giác ABC có $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \ne 1$. Chứng minh rằng $2\cot A = \cot B + \cot C$

Bài 2.80. Cho M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MAB = MBC = MCA = \alpha$.

Chứng minh rằng : $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$

Bài 2.81. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và $GAB = \alpha, GBC = \beta, GCA = \gamma$

Chứng minh rằng $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \dfrac{3\ \ a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

Bài 2.82. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$a - b\ \ \cot\dfrac{C}{2} + \ \ b - c\ \ \cot\dfrac{A}{2} + \ \ c - a\ \ \cot\dfrac{B}{2} = 0$

Bài 2.83: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AC = 3AD$. Chứng minh rằng $\cot BAD \geq \dfrac{4}{3}$

Bài 2.84. Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c và diện tích S. Chứng minh rằng
$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}.S$