

✎ DẠNG 3 : Xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện.

**1. Phương pháp giải.**

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

**2. Các ví dụ.**

**Ví dụ 1:** a) Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$

b) Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$

c) Cho  $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$  tính giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải**

a) Vì  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\cos \alpha < 0$  mặt khác  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  nên  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

c) Vì  $\tan \gamma = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$  mặt khác  $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  nên

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8 + 1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Ví dụ 2:** a) Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ .

b) Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính  $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha \tan^2 \alpha + 1 - \tan^2 \alpha + 1}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha \tan^2 \alpha + 1}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\sqrt{2} \cdot 2 + 1 - 2 + 1}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} \cdot 2 + 1} = \frac{3\sqrt{2} - 1}{3 + 8\sqrt{2}}$$

**Ví dụ 3:** Biết  $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm  $\sin x \cos x$  và  $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

b) Chứng minh rằng  $|m| \leq \sqrt{2}$

**Lời giải**

a) Ta có  $\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$  (\*)

Mặt khác  $\sin x + \cos x = m$  nên  $m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$  hay  $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt  $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$ . Ta có

$$A = \left| \sin^2 x + \cos^2 x \quad \sin^2 x - \cos^2 x \right| = \left| \sin x + \cos x \quad \sin x - \cos x \right|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x) (1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có  $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$  kết hợp với (\*) suy ra

$$\sin x + \cos x \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } |m| \leq \sqrt{2}$$

### 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 2.7:** Tính các giá trị lượng giác còn lại, biết

a)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

b)  $\cos \beta = \sqrt{\frac{1}{5}}$

c)  $\cot \gamma = -\sqrt{2}$

d)  $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$  và  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ .

**Bài 2.8.** a) Cho  $\cos a = \frac{2}{3}$ . Tính  $A = \frac{\cot a + 3 \tan a}{2 \cot a + \tan a}$

b) Cho  $\sin a = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < a < 180^\circ$ . Tính  $B = \frac{3 \cot a + 2 \tan a + 1}{\cot a + \tan a}$

c) Cho  $\tan a = 2$ . Tính  $C = \frac{2 \sin a + 3 \cos a}{\sin a + \cos a}$ ;

d) Cho  $\cot a = 5$ . Tính  $D = 2 \cos^2 a + 5 \sin a \cos a + 1$

**Bài 2.9:** Biết  $\tan x + \cot x = m$ .

a) Tìm  $\tan^2 x + \cot^2 x$       b)  $\frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x}$       c) Chứng minh  $|m| \geq 2$

**Bài 2.10:** Cho  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ . Tính  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

**Bài 2.11:** Cho  $\tan a - \cot a = 3$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = \tan^2 a + \cot^2 a$

b)  $B = \tan a + \cot a$

c)  $C = \tan^4 a - \cot^4 a$

**Bài 2.12:** a) Cho  $3 \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ . Tính  $A = \sin^4 x + 3 \cos^4 x$ .

b) Cho  $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ . Tính  $B = \sin^4 x + 3 \cos^4 x$ .

c) Cho  $4 \sin^4 x + 3 \cos^4 x = \frac{7}{4}$ . Tính  $C = 3 \sin^4 x + 4 \cos^4 x$ .