

DẠNG TOÁN 3 : CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC, CHỨNG MINH BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC GÓC x , ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.

+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x^2$

$\Leftrightarrow \cos^4 x = 1 - \sin^2 x^2$ (*)

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x = \cos^2 x^2$ (đúng) ĐPCM.

b) Ta có $VT = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

Mà $\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x \cot^2 x + 1 = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP$ ĐPCM.

c) Ta có $VT = \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{1}{\cot^2 y} - \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x$

$= \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1\right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = VP$ ĐPCM.

d) $VT = \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\sin^2 x - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{\cos^2 x - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{\sin^2 x - 2^2} + \sqrt{\cos^2 x - 2^2} \\ &= 2 - \sin^2 x + 2 - \cos^2 x = 4 - \sin^2 x + \cos^2 x = 3 \end{aligned}$$

Mặt khác vì $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$VP = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} = \tan A \cdot \cot(B+C)$$

Lời giải

Vì $A+B+C = \pi$ nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{-\sin \frac{B}{2}} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = -\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = -1$$

$$VP = \tan A \cdot \cot \pi - A = \tan A \cdot -\cot A = -1$$

Suy ra $VT = VP$. ĐPCM

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$

b) $B = \frac{\sin(90^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$

c) $C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin x + 2013\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}}$ với $\pi < x < 2\pi$

Lời giải

a) Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos \pi - x + 2.2\pi = \cos \pi - x = -\cos x$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot -x = -\cot x$$

Truy cập website: hoc360.net để tải tài liệu đề thi miễn phí

Suy ra $A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0$

b) Ta có $\sin(90^\circ + x) = \sin 180^\circ + 2.360^\circ + x = \sin 180^\circ + x = -\sin x$

$\cos 450^\circ - x = \cos 90^\circ + 360^\circ - x = \cos 90^\circ - x = \sin x$

$\cot(1080^\circ - x) = \cot(3.360^\circ - x) = \cot -x = -\cot x$

$\tan(630^\circ - x) = \tan(3.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$

$\sin(x - 630^\circ) = \sin x - 2.360^\circ + 90^\circ = \sin x + 90^\circ = \cos x$

$\tan(810^\circ + x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ + x) = \tan(90^\circ + x) = -\cot x$

$\tan(810^\circ - x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$

Vậy $B = \frac{-\sin x - \sin x - \cot x + \cot x}{\sin x + \cos x - (-\cot x) - \cot x} = \frac{-2\sin x}{\sin x + \cos x}$

c) Ta có $\sin x + 2013\pi = \sin x + \pi + 1006.2\pi = \sin x + \pi = -\sin x$ nên

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right) \end{aligned}$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên

$$C = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{\tan x - 1} \cdot \frac{1}{\tan^2 x + 1}$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$

Lời giải

a) Ta có Ta có $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha^3 + \cos^2 \alpha^3 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3}{2} \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{3}{2}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}}{\tan x - 1 - \frac{1}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2 \sin^2 x + \cos^2 x}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1 \end{aligned}$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \sqrt{1 - \cos^2 x} + \sqrt{6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{1 - \sin^2 x} + \sqrt{6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x} \\ &= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} \\ &= \sqrt{2 \cos^2 x + 1} + \sqrt{2 \sin^2 x + 1} \\ &= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Vậy C không phụ thuộc vào x .

3. Bài tập luyện tập.

Giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa.

Bài 6.15: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$$

$$\text{b) } B = 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{c) } C = 2 \sin 90^\circ + x + \sin(900^\circ - x) + \sin 270^\circ + x - \cos 90^\circ - x$$

$$\text{d) } D = \frac{\sin(5\pi + x) \cos\left(x - \frac{9\pi}{2}\right) \tan(10\pi + x)}{\cos(5\pi - x) \sin\left(\frac{11}{2}\pi + x\right) \tan(7\pi - x)}$$

Bài 6.16: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$\text{a) } \tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$$

$$\text{b) } \frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x$$

c) $\sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x(\cos^2 x - \cot^2 x)$

d) $\frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \cdot \tan^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}$

Bài 6.17: Đơn giản các biểu thức sau

a) $\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 180^\circ - x - \cos^2 180^\circ - x$

b) $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} - \cos^2 x$

c) $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos^2 x + \sin x(\sin x - \cos x)}$

d) $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

e) $\sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x}} \quad (0 < x < \pi)$.

f) $\left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\cot^2 x}\right) \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)$.

Bài 6.18: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α .

a) $(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\tan \alpha - \cot \alpha)^2$

b) $2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha)$

c) $\cot^2 30^\circ(\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha) + 4 \cos 60^\circ(\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - \sin^6(90^\circ - \alpha) \tan^2 \alpha - 1^3$

d) $(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1)(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2)$

Bài 6.19: Cho tam giác ABC . Hãy rút gọn

a) $A = \cos^2 \left(540^\circ + \frac{B}{2}\right) + \cos^2 \frac{1080^\circ + A + C}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{A + C}{2}$

b) $B = \frac{\sin \left(\frac{B}{2} + 720^\circ\right)}{\cos \frac{A + C}{2}} + \frac{\cos \left(\frac{B}{2} - 900^\circ\right)}{\sin \frac{A + C}{2}} - \frac{\cos A + C}{\sin B} \cdot \tan B$