➢ DẠNG TOÁN 3. XÉT TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN(ĐƠN ĐIỆU) CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

1. Phương pháp giải.

C1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K. Lấy $x_1, x_2 \in K;\ x_1 < x_2$, đặt $T = f(x_2) - f(x_1)$

- Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow T > 0$.
- Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow T < 0$.

C2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K. Lấy $x_1, x_2 \in K;\ x_1 \neq x_2$, đặt $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow T > 0$.
- Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow T < 0$.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Xét sự biến thiên của hàm số sau trên khoảng $1; +\infty$

a) $y = \dfrac{3}{x-1}$ b) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Lời Giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$, $x_1 \neq x_2$ ta có $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{3}{x_2 - 1} - \dfrac{3}{x_1 - 1} = \dfrac{3(x_1 - x_2)}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$

Suy ra $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\dfrac{3}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$

Vì $x_1 > 1,\ x_2 > 1 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ nên hàm số $y = \dfrac{3}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $1; +\infty$.

b) Với mọi $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)$$

Suy ra $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1 - \dfrac{1}{x_1 x_2}$

Vì $x_1 > 1,\ x_2 > 1 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ nên hàm số $y = x + \dfrac{1}{x}$ đồng biến trên khoảng $1; +\infty$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^2 - 4$

a) Xét chiều biến thiên cuả hàm số trên $-\infty; 0$ và trên $0; +\infty$

b) Lập bảng biến thiên của hàm số trên $[-1; 3]$ từ đó xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 3]$.

Lời Giải

TXĐ: $D = R$

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

Ta có $T = f\ x_2\ - f\ x_1\ = \ x_2^2 - 4\ - \ x_1^2 - 4\ = x_2^2 - x_1^2 = \ x_2 - x_1\ .\ x_1 + x_2$

Nếu $x_1, x_2 \in\ -\infty; 0\ \Rightarrow T < 0$. Vậy hàm số $y = f\ x$ nghịch biến trên $-\infty; 0$.

Nếu $x_1, x_2 \in\ 0; +\infty\ \Rightarrow T > 0$. Vậy hàm số $y = f\ x$ đồng biến trên $0; +\infty$.

b) Bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 4$ trên $\left[-1;3\right]$

x	-1		0		3
$y = x^2 - 4$	-3	$\searrow$		$\nearrow$	5
			-4		

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\max\limits_{[-1;3]} y = 5$ khi và chỉ khi $x = 3$, $\min\limits_{[-1;3]} y = -4$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Ví dụ 3: Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$ trên tập xác định của nó.

Áp dụng giải phương trình

a) $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = 3$

b) $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x^2+9} + x$

Lời Giải

* ĐKXĐ: $\begin{cases} 4x+5 \ge 0 \\ x-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{5}{4} \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$

Suy ra TXĐ: $\mathrm{D} = \left[1;+\infty\right)$

Với mọi $x_1, x_2 \in \left[1;+\infty\right)$, $x_1 \ne x_2$ ta có

$$f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) = \sqrt{4x_2+5} + \sqrt{x_2-1} - \sqrt{4x_1+5} - \sqrt{x_1-1}$$

$$= \frac{4\left(x_2 - x_1\right)}{\sqrt{4x_2+5} + \sqrt{4x_1+5}} + \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1}}$$

$$= \left(x_2 - x_1\right)\left(\frac{4}{\sqrt{4x_2+5} + \sqrt{4x_1+5}} + \frac{1}{\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1}}\right)$$

Suy ra $\dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} = \dfrac{4}{\sqrt{4x_2+5} + \sqrt{4x_1+5}} + \dfrac{1}{\sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_1-1}} > 0$

Nên hàm số $y = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$ đồng biến trên khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

a) Vì hàm số đã cho đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$ nên

Nếu $x > 1 \Rightarrow f\left(x\right) > f\left(1\right)$ hay $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} > 3$

Suy ra phương trình $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = 3$ vô nghiệm

Nếu $x < 1 \Rightarrow f\left(x\right) < f\left(1\right)$ hay $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} < 3$

Suy ra phương trình $\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = 3$ vô nghiệm

Với $x = 1$ dễ thấy nó là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) ĐKXĐ: $x \ge 1$.

Đặt $x^2 + 1 = t$, $t \ge 1 \Rightarrow x^2 = t - 1$ phương trình trở thành

$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4t+5} + \sqrt{t-1} \Leftrightarrow f(x) = f(t)$

Nếu $x > t \Rightarrow f(x) > f(t)$ hay $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1} > \sqrt{4t+5}+\sqrt{t-1}$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm

Nếu $x < t \Rightarrow f(x) < f(t)$ hay $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1} < \sqrt{4t+5}+\sqrt{t-1}$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm

Vậy $f\left(x\right)=f\left(t\right) \Leftrightarrow x=t$ hay $x^2+1=x \Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét: • Hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) thì phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.

• Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên D thì $f(x)>f(y) \Leftrightarrow x>y$ $(x<y)$ và $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$ $\forall x,y \in D$. Tính chất này được sử dụng nhiều trong các bài toán đại số như giải phương trình , bất phương trình , hệ phương trình và các bài toán cực trị.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.9: Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y=4-3x$

b) $y=x^2+4x-5$.

c) $y=\dfrac{2}{x-2}$ trên $\left(-\infty;2\right)$ và trên $\left(2;+\infty\right)$

d) $y=\dfrac{x}{x-1}$ trên $\left(-\infty;1\right)$

Bài 2.10: Chứng minh rằng hàm số $y=x^3+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Áp dụng giải phương trình sau $x^3-x=\sqrt[3]{2x+1}+1$

Bài 2.11: Cho hàm số $y=\sqrt{x-1}+x^2-2x$

a) Xét sự biến thiên của hàm số đã cho trên $[1;+\infty)$

b) Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2;5]$