4. Dạng 4 : Phương trình chứa nhiều dấu gia trị tuyệt đối

$$\mathbf{|A(x)| + B(x) = C(x)}$$

❖ **Cách giải**

- Lập bảng xét điều kiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối.
- Căn cứ bảng xét dấu, chia từng khoảng để giải phương trình (kiểm tra điều kiện tương ứng)

Ví dụ 19. Giải phương trình : $|x+1| + |x-3| = 2x - 1$ $\qquad (2)$

Giải

Ta có $|x+1| = \begin{cases} x+1 & nếu\ x \geq -1 \\ -x-1 & nếu\ x < -1 \end{cases}$ và $|x-3| = \begin{cases} x-3 & nếu\ x \geq 3 \\ -x+3 & nếu\ x < 3 \end{cases}$

Từ đó ta có bảng sau :

x		-1		3	
$\lvert x+1\rvert$	-x – 1	0	x+1		x+1
$\lvert x-3\rvert$	-x + 3		-x+ 3	0	x-3

+ Trường hợp 1 : Nếu $x < -1$ thì phương trình (2) trở thành :

$-x - 1 - x + 3 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$ (không thỏa mãn $x < -1$)

+ Trường hợp 2 : Nếu $-1 \leq x \leq 3$ thì phương trình (2) trở thành :

$x + 1 - x + 3 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$ (thỏa mãn $-1 \leq x \leq 3$)

+ trường hợp 3: Nếu x > 3 thì phương trình (2) trở thành :

$x + 1 + x - 3 = 2x - 1 \Leftrightarrow 0x = 1$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{5}{2}$

Ví dụ 20 Giải phương trình :

$$\left|x + \frac{1}{1.3}\right| + \left|x + \frac{1}{3.5}\right| + \left|x + \frac{1}{5.7}\right| + \ldots + \left|x + \frac{1}{197.99}\right| = 50x$$

Giải

Nhận thấy vế trái không âm với mọi x, nên điều kiện cản để x là nghiệm của phương trình là vế phải không âm, tức là $5x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$

Khi đó các biểu thức trong tất cả các dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái đều dương. Vì vậy phương trình trở thành:

$$\left(x+\frac{1}{1.3}\right)+\left(x+\frac{1}{3.5}\right)+\left(x+\frac{1}{5.7}\right)+...+\left(x+\frac{1}{97.99}\right)=50x$$

$$\Leftrightarrow 49x+\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{97.99}\right)=50x$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+...+\frac{2}{97.99}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...+\frac{1}{97}-\frac{1}{99}=\frac{98}{99}$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{49}{99}$ (thỏa mãn điều kiện $x \ge 0$)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=\dfrac{49}{99}$

5.Dạng 5: $|\mathbf{A}(\mathbf{x})|+|\mathbf{B}(\mathbf{x})|=|\mathbf{A}(\mathbf{x})+\mathbf{B}(\mathbf{x})|$

- Cách giải

Vì $|A(x)+B(x)| \le |A(x)|+|B(x)|$ nên phương trình tương đương với điều kiện xảy ra đẳng thức : $A(x).B(x) \ge 0$

Ví dụ 21.Giải phương trình sau : $|5x+1|+|3-2x|=|4+3x|$

Giải

Ta có $|4+3x|=|5x+1|+|3-2x| \le |5x+1|+|3-2x|, \forall x \in R$

Do đó $|5x+1|+|3-2x|=|4+3x| \Leftrightarrow (5x+1)(3-2x) \ge 0$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\frac{1}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{2}$

5x + 1	-	0	+	|	+
3 – 2x	+	|	+	0	-
$(5x+1)(3-2x)$	-	0	+	0	-

Từ bảng xét dấu, ta có : $(5x+1)(3-2x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{2}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là : $S = \left\{ x \in R \mid -\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{3}{2} \right\}$(hay gọn hơn là

$S = \left[-\frac{1}{5}; \frac{3}{2} \right]$)

Ví dụ 22. Giải bất phương trình:

$$|x+3| + |3x-1| + |2x-1| = 3$$

Giải

Ta có : $|x+3| + |3x-1| + |2x-1| = |x+3| + |-3x+1| + |2x-1|$

$$\geq |x+3+(-3x+1)| + |2x-1| = |-2x+4| + |2x-1|$$

$$\geq |(-2x+4)+(2x-1)| = 3, \forall x \in R$$

Do đó phương trình tương đương với điều kiện xảy ra đẳng thức :

$$\begin{cases} (x+3)(-3x+1) \geq 0 \\ (-2x+4)(2x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+9)(3x-1) \leq 0 \\ (2x-4)(2x-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9 \geq 0 \geq 3x-1 \\ 2x-4 \leq 0 \leq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+9 \geq 0 \\ 3x-1 \leq 0 \\ 2x-4 \leq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq \frac{1}{3} \\ x \leq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{không có x thỏa mãn.}$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.