5.Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

Ví dụ 36. Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng $a^4+b^4\ge 2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai cặp số $(1;1)$ và $(a;b)$ ta có :

$(1.a+1.b)^2\le(1^2+1^2)(a^2+b^2)$

Kết hợp với giả thiết ta có $2^2\le 2(a^2+b^2)\Rightarrow a^2+b^2\ge 2$ (1)

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai cặp số $(1;1)$ và $(a^2;b^2)$ ta có :

$(1.a^2+1.b^2)^2\le(1^2+1^2)(a^4+b^4)$

Kết hợp với (1) ta có $2^2\le 2(a^2+b^2)^2\le 2(a^4+b^4)\Rightarrow a^4+b^4\ge 2$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}a=b\\ a^2=b^2\end{cases}$ $hay\ a=b$

Kết hợp với giả thiết ta có $a=b=1$

Ví dụ 37. Cho $36x^2+16y^2=9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :

$P=y-2x+5$

Giải

Ta có $(y-2x)^2=(-2x+y)^2=\left[\frac{1}{3}.(-6x)+\frac{1}{4}(4y)\right]^2$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai cặp số $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$ và $(-6x;4y)$ ta có :

$(y-2x)^2\le\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right].\left[(-6x)^2+(4y)^2\right]=\frac{5^2}{3^2.4^2}(36x^2+16y^2)=\frac{5^2}{4^2}$

Suy ra $|y-2x|\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}\le y-2x\le\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{15}{4}\le y-2x+5\le\frac{25}{4}\ hay\ \frac{15}{4}\le P\le\frac{25}{4}$

Vậy $P_{max}=\frac{25}{4}\ khi\begin{cases}-18x=16y\\ y-2x=\frac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{-2}{5}\\ y=\frac{9}{20}\end{cases}$

Và $P_{\min} = \dfrac{15}{4} khi \begin{cases} -18x = 16y \\ y - 2x = -\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{-9}{20} \end{cases}$