➢ DẠNG TOÁN 3: BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.

1. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình $\dfrac{mx-m+1}{x-1}>0$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\neq 1$

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x>1 \\ mx-m+1>0 \end{cases}$(3) hoặc $\begin{cases} x<1 \\ mx-m+1<0 \end{cases}$(4)

+ TH1: $m>0$ ta có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\dfrac{1-m}{m} \end{cases}$ và (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<\dfrac{1-m}{m} \end{cases}$

Nếu $\dfrac{1-m}{m}>1\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x>\dfrac{1-m}{m}$ và (4) $\Leftrightarrow x<1$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in \ -\infty;1\ \cup\left(\dfrac{1-m}{m};+\infty\right)$

Nếu $\dfrac{1-m}{m}=1\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x>1$ và (4) $\Leftrightarrow x<1$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in\mathbb{R}\setminus\ 1$

Nếu $\dfrac{1-m}{m}<1\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x>1$ và (4) $\Leftrightarrow x<\dfrac{1-m}{m}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(-\infty;\dfrac{1-m}{m}\right)\cup\ 1;+\infty$

+ TH2: $m=0$ ta có (3) trở thành $\begin{cases} x>1 \\ 0x+1>0 \end{cases}\Leftrightarrow x>1$, (4) trở thành $\begin{cases} x<1 \\ 0x+1<0 \end{cases}$(vô nghiệm)

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in\ 1;+\infty$

+ TH3: $m<0$ ta có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<\dfrac{1-m}{m} \end{cases}$ và (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>\dfrac{1-m}{m} \end{cases}$

Nếu $\dfrac{1-m}{m}>1\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$ khi đó (3)$\Leftrightarrow x\in\left(1;\dfrac{1-m}{m}\right)$ và (4) $\Leftrightarrow x\in\ -\infty;1\ \cup\left(\dfrac{1-m}{m};+\infty\right)$

Suy ra với $m<0$ nghiệm của bất phương trình là $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1;\dfrac{1-m}{m}\right\}$

Kết luận

$0<m<\dfrac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\ -\infty;1\ \cup\left(\dfrac{1-m}{m};+\infty\right)$

$m=\dfrac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\ 1$

$m>\dfrac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\left(-\infty;\dfrac{1-m}{m}\right)\cup\ 1;+\infty$

$m=0$ tập nghiệm bất phương trình là $\mathrm{S}=\ \ 1;+\infty$

$m<0$ tập nghiệm bất phương trình là $\mathrm{S}=\mathbb{R}\setminus\left\{1;\dfrac{1-m}{m}\right\}$

Ví dụ 2: Cho bất phương trình $\sqrt{\ m^2-4\ \ x-m+3}>2$.

a) Giải bất phương trình khi $m=1$
b) Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x
Lời giải

a) Khi $m=1$ bất phương trình trở thành $\sqrt{-3x+2}>2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2\ge 0\\-3x+2\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow x\le -\dfrac{2}{3}$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $\mathrm{S}=(-\infty;-\dfrac{2}{3}]$

b) ĐKXĐ: $\ m^2-4\ \ x-m+3\ge 0$ (*)

Giả sử bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thì khi đó (*) đúng mọi x
Suy ra $m^2-4=0\Leftrightarrow m=\pm 2$
Với $m=2$ ta có bất phương trình trở thành $\sqrt{0.x-2+3}>2$ (vô nghiệm)
Với $m=-2$ ta có bất phương trình trở thành $\sqrt{0.x+2+3}>2$ (đúng với mọi x)

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.
Ví dụ 3: Cho bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-2m+2)\ge 0$
a) Giải bất phương trình khi $m=2$
b) Tìm m để mọi $x\in\left[2;3\right]$ đều là nghiệm của bất phương trình đã cho.
Lời giải

a) Khi $m=2$ bất phương trình trở thành $\sqrt{x-1}(x-2)\ge 0$

Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \begin{cases}x-1\ge 0\\x-2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \begin{cases}x\ge 1\\x\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x\ge 2\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $\mathrm{S}=\ \ 1\ \ \cup[2;+\infty)$.

b) Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0\\ \begin{cases}x-1\ge 0\\x-2m+2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \begin{cases}x\ge 1\\x\ge 2m-2\end{cases}\end{array}\right.$

+ TH1: $2m-2>1\Leftrightarrow m>\dfrac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x\ge 2m-2\end{array}\right.$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S=\ \ 1\ \ \cup[2m-2;+\infty)$.

Do đó mọi $x \in \left[2;3\right]$ đều là nghiệm của bất phương trình (*)

$\Leftrightarrow \left[2;3\right] \subset S \Leftrightarrow 2m-2 \le 2 \Leftrightarrow m \le 2$

Suy ra $\dfrac{3}{2} < m \le 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: $2m-2=1 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 1$

Suy ra $m=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH3: $2m-2<1 \Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2}$: Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 1$

Suy ra $m<\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy giá trị cần tìm là $m \le 2$.

Ví dụ 4: Tìm tất cả các giá trị của m để

a) Bất phương trình $mx+4>0$ (1) nghiệm đúng với mọi $\left|x\right|<8$

b) Bất phương trình $\dfrac{mx}{x^2+1}-2m-3<0$ (2) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$

Lời giải

a) *Cách 1:* Ta có $\left|x\right|<8 \Leftrightarrow -8<x<8 \Leftrightarrow x \in \ -8;8$

+ TH1: $m>0$ ta có (1)$\Leftrightarrow mx>-4 \Leftrightarrow x>-\dfrac{4}{m}$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S=\left(-\dfrac{4}{m};+\infty\right)$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $\left|x\right|<8$ khi và chỉ khi

$\ -8;8\ \subset S \Leftrightarrow -\dfrac{4}{m} \le -8 \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{2}$

Suy ra $0<m\le\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: $m=0$ khi đó bất phương trình (1) trở thành $0.x+4>0$(đúng với mọi x)

Do đó $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH3: $m<0$ ta có (1)$\Leftrightarrow mx>-4 \Leftrightarrow x<-\dfrac{4}{m}$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S=\left(-\infty;-\dfrac{4}{m}\right)$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $\left|x\right|<8$ khi và chỉ khi

$\ -8;8\ \subset S \Leftrightarrow -\dfrac{4}{m} \ge 8 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{1}{2}$

Suy ra $-\frac{1}{2} \le m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $-\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $|x| < 8$ khi và chỉ khi

$mx + 4 > 0,\ \forall x \in \left(-8;8\right)$

Xét hàm số $f\left(x\right) = mx + 4$. Ta biết đồ thị là một đường thẳng do đó

$$f(x) = mx + 4 > 0,\ \forall x \in \left(-8;8\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \ge 0 \\ f(8) \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 4 \ge 0 \\ 8m + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \frac{1}{2} \\ m \ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$$

Vậy $-\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Đặt $t = \frac{x}{x^2+1}$ bất phương trình trở thành $mt - 2m - 3 < 0$

Với $x > 0$ ta có $\frac{x}{x^2+1} \le \frac{x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2}$ khi đó $0 < t \le \frac{1}{2}$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$ khi và chỉ khi bất phương trình

$$mt - 2m - 3 < 0 \text{ đúng với mọi } t \in (0;\frac{1}{2}] \Leftrightarrow \begin{cases} -2m - 3 \le 0 \\ \frac{1}{2}m - 2m - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -\frac{3}{2} \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge -\frac{3}{2}$$

Vậy $m \ge -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét : Bất phương trình $f\left(x\right) = ax + b > 0,\ \forall x \in \left[\alpha;\beta\right] \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\alpha\right) > 0 \\ f\left(\beta\right) > 0 \end{cases}$, Bất phương trình $f\left(x\right) = ax + b > 0,\ \forall x \in \left(\alpha;\beta\right) \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\alpha\right) \ge 0 \\ f\left(\beta\right) \ge 0 \end{cases}$. Các trường hợp khác tương tự.

Ví dụ 5: Cho phương trình $\left(m+1\right)x^2 - \left(4m+3\right)x + 4m + 1 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1)

a) Có một nghiệm lớn hơn 2 và một nghiệm nhỏ hơn 2.

b) Có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2

Lời giải

Đặt $y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$ khi đó phương trình (1) trở thành

$$\left(m+1\right)\left(y+2\right)^2 - \left(4m+3\right)\left(y+2\right) + 4m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m+1\right)y^2 + 4\left(m+1\right)y + 4\left(m+1\right) - \left(4m+3\right)y - 2\left(4m+3\right) + 4m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m+1\right)y^2 + y - 1 = 0 \ (2)$$

a) Phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2 một nghiệm nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm trái

+ TH1: Với $m=-1$ phương trình (2) trở thành $y-1=0 \Leftrightarrow y=1$ suy ra $m=-1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

TH2: Với $m \neq -1$ phương trình (2) là phương trình bậc hai do đó nó có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow P<0 \Leftrightarrow \frac{-1}{m+1}<0 \Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$$

Vậy với $m>-1$ thì phương trình (1)

b) Ta có phương trình (1) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có ít nhất một nghiệm dương.

- Với $m=-1$ phương trình (2) trở thành $y-1=0 \Leftrightarrow y=1$ suy ra $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán
- Với $m \neq -1$ phương trình (2) là phương trình bậc hai

+ TH1: Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4\ \ m+1\ \ >0 \\ -\dfrac{1}{m+1}>0 \\ -\dfrac{1}{m+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{5}{4} \\ m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4}<m<-1$$

+ TH2: Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m>-1$ (theo câu a)

+ TH3: Phương trình (2) có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+4(m+1)=0 \\ -\dfrac{1}{m+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-\dfrac{5}{4} \\ m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{5}{4}$$

+ TH4: Phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng không

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S>0 \\ P=0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{m+1}>0 \\ -\dfrac{1}{m+1}=0 \\ 1+4(m+1)>0 \end{cases}$$ (không tồn tại giá trị nào của m)

Vậy $m \geq -\frac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Để so sánh nghiệm phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với số thực α ta đặt $y=x-\alpha$ và quy về việc xét dấu nghiệm của phương trình bậc hai

2. Bài tập luyện tập

Bài 4.75: Giải và biện luận bất phương trình $\dfrac{2x+m-1}{x+1}>0$

Bài 4.76: Tìm điều kiện của m để phương trình $2x^2+\ \ 2m-1\ \ x+m-1=0$

a) Có hai nghiệm khác dấu

b) Có hai nghiệm phân biệt đều âm

c) Có hai nghiệm phân biệt đều dương

d) Có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

Bài 4.77: Giải và biện luận bất phương trình $\sqrt{4-x}\left[\ \ m^2+1\ \ x-5m^2\right] \leq 0$

Bài 4.78: a) Với giá trị nào của m thì bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;3)$.

b) Cho bất phương trình $\left(1+\dfrac{4x}{1+x^2}\right)m+\dfrac{2x}{1+x^2}<3$. Tìm m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$.

c) Với điều kiện nào của $a,\ b$ thì bất phương trình $a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+b \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \neq 0$.

Bài 4.79: Tìm m để phương trình $\left(x^2-2x\right)^2-2m\left(x^2-2x\right)+m+3=0$ có 2 nghiệm phân biệt.