## ➢ DẠNG 3: ĐẶT ẨN PHỤ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC.

**1. Phương pháp giải.**

Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phát hiện ra ẩn phụ (ẩn phụ có thể là $x = f\left(a,b,c\right),\ y = g\left(a,b,c\right),\ z = h\left(a,b,c\right)$ hoặc là chỉ một ẩn phụ $t = f\left(a;b;c\right)$). Ẩn phụ có thể có ngay trong biểu thức của bất đẳng hoặc qua một số phép biến đổi, đánh giá.

**2. Các ví dụ minh họa.**

**Ví dụ 1:** Cho các số dương $a,b,c$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{6b+8c}{2a+b}+\dfrac{3a+2b+c}{b+c}\ge 7$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{b+c+4a}+\dfrac{c+a}{c+a+16b}$ .

***Lời giải***

a) Đặt $x=a+b+c,\ y=2a+b,\ z=b+c$

Suy ra $a=x-z,\ b=-2x+y+2z,\ c=2x-y-z$

Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{-x+y+z}{x}+\dfrac{4x-2y+4z}{y}+\dfrac{x+y}{z}\ge 7$

$\Leftrightarrow -1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{4x}{y}-2+\dfrac{4z}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}\ge 7$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\right)+\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\right)+\left(\dfrac{4z}{y}+\dfrac{y}{z}\right)\ge 10$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\ge 4,\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\ge 2,\ \dfrac{4z}{y}+\dfrac{y}{z}\ge 4$

Suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}2x=y\\ x=z\\ 2z=y\end{cases}\Leftrightarrow 2x=y=2z$ suy ra không tồn tại $a,b,c$.

Dấu đẳng thức không xảy ra.

b) Đặt $x=a+b+c,\ y=b+c+4a,\ z=c+a+16b$

Suy ra $a=\dfrac{y-x}{3},\ b=\dfrac{z-x}{15},\ c=\dfrac{21x-5y-z}{15}$

Khi đó ta có $P=\dfrac{-6x+5y+z}{15x}+\dfrac{4x-y}{3y}+\dfrac{16x-z}{15z}$

$\Rightarrow P=\dfrac{y}{3x}+\dfrac{4x}{3y}+\dfrac{z}{15y}+\dfrac{16x}{15z}-\dfrac{4}{5}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{y}{3x}+\dfrac{4x}{3y}\ge\dfrac{4}{3},\ \dfrac{z}{15y}+\dfrac{16y}{15z}\ge\dfrac{8}{15}$

Suy ra $P\ge\dfrac{4}{3}+\dfrac{8}{15}-\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x=2y=z\Leftrightarrow a=\dfrac{5b}{3}=\dfrac{5c}{7}$

Vậy $\min P=\dfrac{16}{15}$ khi và chỉ khi $a=\dfrac{5b}{3}=\dfrac{5c}{7}$.

**Ví dụ 2:** Cho $a,b,c$ là ba cạnh của tam giác có chu vi là $2p$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\geq\sqrt{\frac{b+c}{p-a}}+\sqrt{\frac{c+a}{p-b}}+\sqrt{\frac{a+b}{p-c}}$$

***Lời giải***

Đặt $x=p-a;\ y=p-b;\ z=p-c$ suy ra $a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y$.

Do $a,b,c$ là ba cạnh của tam giác nên $x,y,z$ dương

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geq\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $4\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}\leq\left(2+\frac{y+z}{x}\right)+4=\frac{y+z}{x}+6$

Tương tự ta có $4\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}\leq\frac{z+x}{y}+6,\ 4\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\leq\frac{x+y}{z}+6$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$4\left(\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\right)\leq\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geq\frac{1}{4}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geq 6.$$

Ta có $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}=2,\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2,\ \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$

Suy ra $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\geq 6$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác đều.

**Nhận xét** : Đối với BĐT có giả thiết $a,b,c$ là ba cạnh của tam giác thì ta thực hiện phép đặt ẩn phụ $x=\frac{a+b-c}{2},\ y=\frac{a-b+c}{2},\ z=\frac{-a+b+c}{2}$ thì khi đó $a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y$ và $x,y,z$ dương. Ta chuyển về bài toán với giả thiết $x,y,z$ dương không còn ràng buộc là ba cạnh của tam giác.

**Ví dụ 3:** Cho $x,y,z$ là số dương. Chứng minh rằng $x^3+2y^3+3z^3\geq\frac{1590}{1331}\left(x+y+z\right)^3$

***Lời giải***

Ta có BĐT $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3 \geq$

Đặt $a = \frac{x}{x+y+z}$, $b = \frac{y}{x+y+z}$, $c = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow a,b,c$ dương và $a+b+c=1$

BĐT trở thành $a^3+2b^3+3c^3 \geq \frac{1590}{1331}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}a$, $2b^3 + 2\left(\frac{3}{11}\right)^3 + 2\left(\frac{3}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}b$, $3c^3 + 3\left(\frac{2}{11}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}c$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$a^3+2b^3+3c^3+\frac{588}{1331} \geq \frac{18}{11}\ a+b+c\ = \frac{18}{11}$$

Suy ra $a^3+2b^3+3c^3 \geq \frac{1590}{1331}$.

***Nhận xét:*** Phương pháp đặt ẩn phụ trên được áp dụng khi BĐT là đồng bậc(Người ta gọi là phương pháp chuẩn hóa)

**Ví dụ 4:** Cho $x,y,z$ là số dương thỏa mãn $x+y+z \leq \frac{3}{2}$

Chứng minh rằng $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{15}{2}$.

***Lời giải***

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ và $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ nên $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Suy ra $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+y+z+\frac{9}{x+y+z}$

Đặt $t = x+y+z \Rightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh $x+y+z+\frac{9}{x+y+z} = t+\frac{9}{t} \geq \frac{15}{2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$t+\frac{9}{t} = t+\frac{9}{4t}+\frac{27}{4t} \geq 2\sqrt{t.\frac{9}{4t}}+\frac{27}{4.\frac{3}{2}} = \frac{15}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.

**Ví dụ 5:** Cho ba số thực dương $a,b,c$ thỏa mãn $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a+b+c+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$ .

***Lời giải***

Ta có $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1 \Leftrightarrow 4=abc+ab+bc+ca$

Áp dụng BĐT côsi ta có $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

Suy ra $4=abc+ab+bc+ca \geq abc+3\sqrt[3]{(abc)^2}=t^3+3t^2$, với $t=\sqrt[3]{abc}$ .

$\Rightarrow t^3+3t^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$

Cũng theo BĐT côsi ta có

$P=a+b+c+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3\sqrt[3]{abc}+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $P \geq 3t+\frac{4}{t}=\left(3t+\frac{3}{t}\right)+\frac{1}{t}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $3t+\frac{3}{t} \geq 2\sqrt{3t.\frac{3}{t}}=6$, mặt khác $t \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{t} \geq 1$

Do đó $P \geq 3t+\frac{4}{t} \geq 7$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=1$ hay $a=b=c=1$

Vậy $\min P=7 \Leftrightarrow a=b=c=1$

**Ví dụ 6:** Cho $x,\ y,\ z$ dương thỏa mãn $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{x^2+y^2+z^2+14xyz}{4(x+y+z)^2+15xyz}$

***Lời giải***

Ta có $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=8 \Leftrightarrow 8xyz=1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+14xyz=(x+y+z)^2+2(x+y+z)+2 \quad (1)$

Áp dụng BĐT côsi ta có: $8=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq \frac{8}{\sqrt{xyz}} \Rightarrow xyz \geq 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có $P \leq \frac{(x+y+z)^2+2(x+y+z)+2}{4(x+y+z)^2+15}=\frac{t^2+2t+2}{4t^2+15}$ với $x+y+z=t>0$.

Xét $\frac{t^2+2t+2}{4t^2+15}-\frac{1}{3}=\frac{-t^2+6t-9}{12t^2+45}=-\frac{(t-3)^2}{12t^2+45} \leq 0$

Suy ra $\frac{t^2+2t+2}{4t^2+15} \leq \frac{1}{3}$ do đó $P \leq \frac{1}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=3$ hay $x=y=z=1$

Vậy $\max P=\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 4.42:** Cho $x,y,z$ dương , CMR $\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{x+y}>12$

**Bài 4.43:** Cho các số dương $a,b,c$. Chứng minh rằng

$$\frac{4a}{a+b+2c}+\frac{b+3c}{2a+b+c}-\frac{8c}{a+b+3c}\ge 12\sqrt{2}-17$$

**Bài 4.44:** Cho $x,\ y,\ z$ là các số dương thoả mãn $xyz\ge x+y+z+2$. Chứng minh rằng $x+y+z\ge 6$.

**Bài 4.45:** Cho $a,b,c$ là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\dfrac{a^{11}}{bc}+\dfrac{b^{11}}{ca}+\dfrac{c^{11}}{ab}+\dfrac{3}{a^2b^2c^2}\ge\dfrac{a^6+b^6+c^6+9}{2}$

**Bài 4.46:** Cho $x,y,z$ là số không âm thoatr mãn $x^2+y^2+z^2+xyz=4$. Chứng minh rằng $x+y+z\le 3$.

**Bài 4.47:** Cho $x,y,z$ là số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

**Bài 4.48:** Cho $x,y,z\in(0;1)$ và $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2\ge\dfrac{3}{4}$

**Bài 4.49:** Cho các số thực $x,y$ thỏa $x\ne -2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{(2x^2+13y^2-xy)^2-6xy+9}{(x+2y)^2}.$$