Bài toán 02: CHỨNG MINH BA VEC TƠ ĐỒNG PHẲNG VÀ BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG.

Phương pháp:

Để chứng minh ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ta có thể thực hiện theo một trong các cách sau:

- Chứng minh giá của ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng.
- Phân tích $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ trong đó $\vec{a},\vec{b}$ là hai vec tơ không cùng phương.

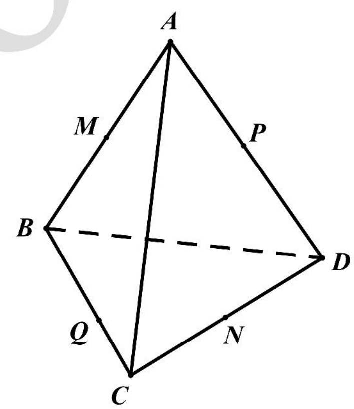
Để chứng minh bốn điểm A,B,C,D đồng phẳng ta có thể chứng minh ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng. Ngoài ra có thể sử dụng kết quả quen thuộc sau:

Điều kiện cần và đủ để điểm $D\in\left(ABC\right)$ là với mọi điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ trong đó $x+y+z=1$.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Gọi P,Q lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD},\ \overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}\left(k\ne 1\right)$. Chứng minh M,N,P,Q đồng phẳng.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD}\Rightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MP}=k\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MP}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}=\dfrac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}}{1-k}$.

Tương tự $\overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}\Rightarrow\overrightarrow{MQ}=\dfrac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

Suy ra $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\dfrac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

$=\dfrac{k}{k-1}\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$ (Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$)

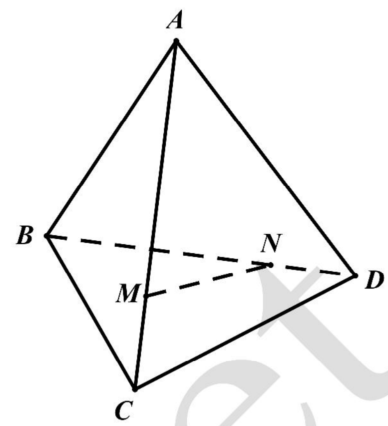
Mặt khác N là trung điểm của CD nên

$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\dfrac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}$ suy ra ba vec tơ $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng, hay bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$, các điểm M,N xác định bởi $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MC},\overrightarrow{NB}=y\overrightarrow{ND}$ $\left(x,y\ne 1\right)$. Tìm điều kiện giữa x và y để ba vec tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\overrightarrow{DB}=\vec{b},\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.



$\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM} = x\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \dfrac{\overrightarrow{DA} - x\overrightarrow{DC}}{1-x} = \dfrac{\vec{a} - x\vec{c}}{1-x} \quad (1)$.

Lại có $\overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{1-y}\overrightarrow{DB} = \dfrac{1}{1-y}\vec{b} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = \dfrac{-1}{1-x}\vec{a} + \dfrac{1}{1-y}\vec{b} + \dfrac{x}{1-x}\vec{c}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{CD} = -\vec{c}$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vec tơ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{CD}$, tức là

$\dfrac{-1}{1-x}\vec{a} + \dfrac{1}{1-y}\vec{b} + \dfrac{x}{1-x}\vec{c} = m\left(\vec{b} - \vec{a}\right) - n\vec{c}$

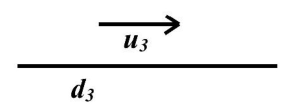
$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{1-x}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-y} - m\right)\vec{b} + \left(n + \frac{x}{1-x}\right)\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{1-x} \\ m = \dfrac{1}{1-y} \\ n = -\dfrac{x}{1-x} \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Vậy ba vec tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x = y$.

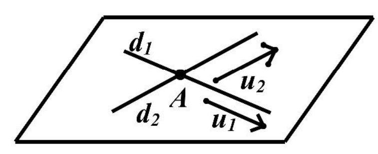
Lưu ý : Ta có thể sử dụng điều kiện đồng phẳng của ba vec tơ để xét vị trí tương đối của đường thẳng với mặt phẳng:

Cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt chứa ba vec tơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ trong đó d_1, d_2 cắt nhau và $d_3 \not\subset mp\left(d_1, d_2\right)$.

Khi đó :



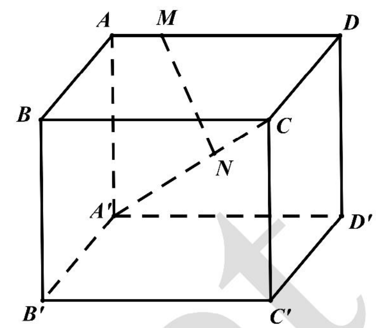
- $d_3 \,//\, \left(d_1, d_2\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ là ba vec tơ đồng phẳng.
- $d_3 \cap mp\left(d_1, d_2\right) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ là ba vec tơ không đồng phẳng



Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, M, N là các điểm thỏa $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{NA'} = -\dfrac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh $MN \,//\, \left(BC'D\right)$.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BB'}=\vec{b},\overrightarrow{BC}=\vec{c}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là ba vec tơ không đồng phẳng và



$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{c}$

$\overrightarrow{BC'}=\vec{b}+\vec{c},\overrightarrow{BA'}=\vec{a}+\vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MD}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BM}\right)$

$\Rightarrow\frac{5}{4}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{4\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{5}=\frac{4\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{c}\right)}{5}=\frac{5\vec{a}+\vec{c}}{5}$.

Tương tự $\overrightarrow{BN}=\frac{3\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}}{5}$,

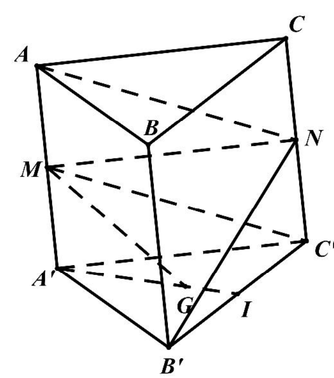
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=\frac{-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}}{5}=-\frac{2}{5}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)+\frac{3}{5}(\vec{b}+\vec{c})=-\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC'}$

Suy ra $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{BC'}$ đồng phẳng mà $N\notin\left(BC'D\right)\Rightarrow MN\,//\left(BC'D\right)$.

Nhận xét: Có thể sử dụng phương pháp trên để chứng minh hai mặt phẳng song song.

Ví dụ 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AA',CC' và G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.
Chứng minh $\left(MGC'\right)//\left(AB'N\right)$.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

Vì M,N lần lượt là trung điểm của AA',CC' nên

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

Vì G là trọng tamm của tam giác $A'B'C'$ nên

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

Ta có

$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB'}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$ suy ra $\overrightarrow{MG},\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AN}$ đồng phẳng, Mắt khác $G\notin\left(AB'N\right)\Rightarrow MG\,//\left(AB'N\right)$ (1)

Tương tự $\overrightarrow{MC'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{k}=\overrightarrow{AN}$ $\Rightarrow MC'\,//\left(AB'N\right)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}MG//(AB'N)\\MC'\left(AB'N\right)\end{cases}\Rightarrow\left(MGC'\right)//\left(AB'N\right)$.