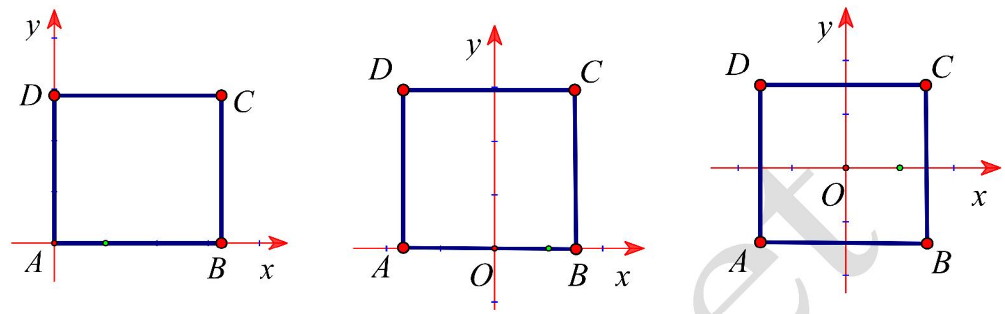
III. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC ĐẶC BIỆT.

1. Phương pháp.

a) Nếu $ABCD$ là hình vuông hoặc hình chữ nhật.

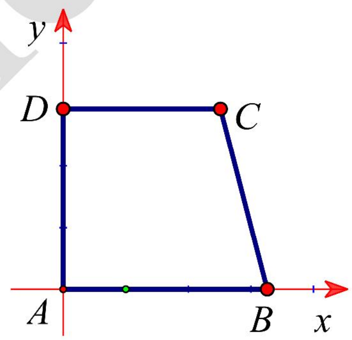
Ta thường thiết lập hệ trục toạ độ như sau (hình 3.16)



Hình 3.16

b) Nếu $ABCD$ là hình thang vuông.

Ta thường thiết lập hệ toạ độ Oxy như hình vẽ (hình 3.17)



Hình 3.17

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ BK vuông góc với AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD.

a) Chứng minh: $BMN = 90^0$

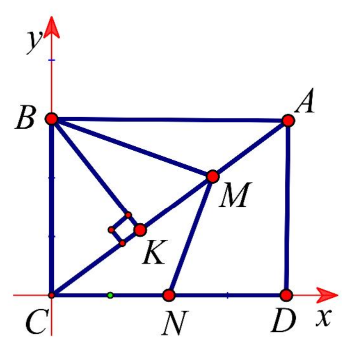
b) Tìm điều kiện của hình chữ nhật để tam giác BMN vuông cân.

Lời giải (hình 3.18)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $C \equiv O, D \in Ox,\ B \in Oy$

Giả sử $AB = a,\ BC = b$ suy ra

$A(a;b),\ B(0;b),\ C(0;0),\ D(a;0)$



Hình 3.18

Đường thẳng AC có phương trình là $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ hay

$bx - ay = 0$ (1)

Đường thẳng BK nhận $\vec{n}(b;-a)$ là VTCP nên

có phương trình là $\begin{cases} x = bt \\ y = b - at \end{cases}$ (2)

Thế (2) vào (1) ta có $b^2t - a(b - at) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{ab}{a^2 + b^2}$ suy ra

$K\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2};\frac{b^3}{a^2+b^2}\right)$

M là trung điểm của AK nên $M\left(\frac{a^3+2ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)};\frac{a^2b+2b^3}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$

N là trung điểm của CD nên $N\left(\frac{a}{2};0\right)$

a) Ta có $\overrightarrow{BM}\left(\frac{a^3+2ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)};\frac{-a^2b}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$, $\overrightarrow{NM}\left(\frac{ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)};\frac{a^2b+2b^3}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)$

Suy ra

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{NM}=\frac{ab^2\left(a^3+2ab^2\right)-a^2b\left(a^2b+2b^3\right)}{4\left(a^2+b^2\right)^2}=0\Rightarrow BMN=90^0$$

b) Theo câu a) ta có $BMN=90^0$ nên ΔBMN vuông cân khi và chỉ khi

$$BM=NM\Leftrightarrow\left(\frac{a^3+2ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)^2+\left(\frac{-a^2b}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)^2=\left(\frac{ab^2}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)^2+\left(\frac{a^2b+2b^3}{2\left(a^2+b^2\right)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(a^3+2ab^2\right)^2-\left(ab^2\right)^2=\left(a^2b+2b^3\right)^2-\left(a^2b\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\left(a^3+3ab^2\right)\left(a^3+ab^2\right)=2b^3\left(2a^2b+2b^3\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4+3a^2b^2-4b^4=0\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+4b^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

Hay $ABCD$ là hình vuông

Ví dụ 2. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB=2a$, đáy lớn $BC=3a$, đáy nhỏ $AD=a$. I là trung điểm của CD. Chứng minh rằng AI vuông góc với BD

Lời giải (hình 3.19)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho

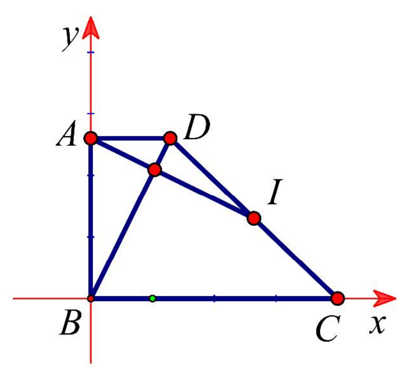
$B\equiv O, C\in Ox,\ A\in Oy$

Ta có $A\left(0;2a\right)$, $B\left(0;0\right)$, $C\left(3a;0\right)$, $D\left(a;2a\right)$

I là trung điểm của DC nên $I\left(2a;a\right)$

$\overrightarrow{AI}\left(2a;-a\right)$, $\overrightarrow{BD}\left(a;2a\right)$ suy ra $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}=0$

Vậy AI vuông góc với BD



Hình 3.19

Ví dụ 3: Cho hình vuông $ABCD$. Trên BD lấy điểm M không trùng với B, D. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh AB, AD. Chứng minh rằng

a) CM vuông góc với EF

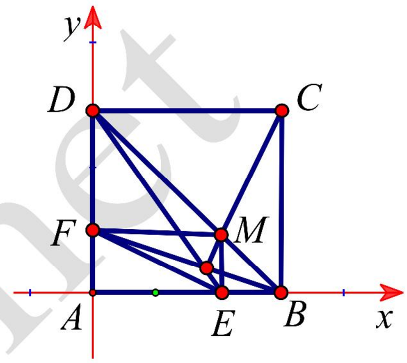
b) Ba đường thẳng CM, BF, DE đồng quy.

Lời giải (hình 3.20)

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A \equiv O, B \in Ox,\ D \in Oy$

Không mất tính tổng quát giả sử $AB = a$

$$\Rightarrow B(a;0),\ D(0;a),\ C(a;a),\ BD: \begin{cases} x = a - at \\ y = at \end{cases}$$



Hình 3.20

a) Vì $M \in BD$

$\Rightarrow M(a - az; az),\ E(a - az; 0),\ F(0; az)$

Do đó $\overrightarrow{CM}(-az; az - a),\ \overrightarrow{EF}(az - a; az)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{EF} = -az(az - a) + (az - a)az = 0$

Vậy nên $CM \perp EF$

b) Đường thẳng CM đi qua C và nhận $\overrightarrow{CM}$ làm VTCP có phương trình là

$$\begin{cases} x = a - azt \\ y = a + (az - a)t \end{cases} \quad (1)$$

Đường thẳng BF có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{az} = 1$ hay $zx + y - az = 0$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có

$$z(a - azt) + a + (az - a)t - az = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{z^2 - z + 1}$$

Suy ra tọa độ giao điểm của BF và CM là $K\left(\frac{a(z-1)^2}{z^2 - z + 1}; \frac{az^2}{z^2 - z + 1}\right)$

Mặt khác đường thẳng DE có phương trình là $\frac{x}{a - az} + \frac{y}{a} = 1$ hay

$x + (1 - z)y + a(z - 1) = 0$ (*)

Thay tọa độ K vào phương trình (*) ta có

$$\frac{a(z-1)^2}{z^2 - z + 1} + (1 - z)\frac{az^2}{z^2 - z + 1} + a(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow az^2 - 2az + a + az^2 - az^3 + a \ \ z^3 - z^2 + z - z^2 + z - 1 \ \ = 0$$

(đúng)

Vậy tọa độ điểm K là nghiệm của phương trình đường thẳng DE do đó ba đường thẳng CM, BF, DE đồng quy.