b) Ứng dụng trong giải hệ phương trình, hệ bất phương trình.

Ví dụ 3: Giải hệ $\begin{cases} x\ \ y-1\ \ +yz=0 \\ x\ \ 2z-3\ \ +y\ \ x-z\ \ =0 \\ \ 2z-3\ ^2+\ \ x-z\ ^2=\ \ y-1\ ^2+z^2 \end{cases}$

Lời giải

Xét $\vec{u}\ \ x;y\ \ ,\vec{v}\ \ y-1;z\ \ ,\vec{w}\ \ 2z-3;x-z\ \ .$

Từ hệ suy ra $\vec{u}.\vec{v}=0\,(1),\ \vec{u}.\vec{w}=0\,(2),\ \vec{v}^2=\vec{w}^2\ (3)$

* TH1: Nếu $\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow x=y=0$ thay vào hệ suy ra $z=1$ hoặc $z=2.$

* TH2: Nếu $\vec{u}\neq\vec{0}$ từ (1) và (2) suy ra $\vec{v},\vec{w}$ cùng phương.

Mặt khác có $\vec{v}^2=\vec{w}^2$ nên ta suy ra $\vec{v}=\pm\vec{w}.$

+ Với $\vec{v}=\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases} y-1=2z-3 \\ z=x-z \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=2z-2 \\ x=2z \end{cases}$

Thay $x,\ y$ vào phương trình đầu ta được

$2z\ \ 2z-3\ \ +\ \ 2z-2\ \ z=0\Leftrightarrow 2z\ \ 3z-4\ \ =0\Leftrightarrow z=0$ hoặc

$z=\dfrac{4}{3}$

Nếu $z=0\Rightarrow x=0,\ \ y=-2$, nếu $z=\dfrac{4}{3}\Rightarrow x=\dfrac{8}{3},y=\dfrac{2}{3}$

+ Với $\vec{v}=-\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases} y-1=3-2z \\ z=z-x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=4-2z \\ x=0 \end{cases}$

Thay $x,\ y$ vào phương trình đầu ta được $z\ \ 4-2z\ \ =0\Leftrightarrow z=0$ hoặc

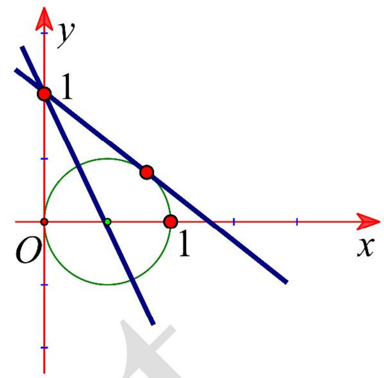
$z=2$

Nếu $z=0\Rightarrow y=4$, nếu $z=2\Rightarrow y=0$

Vậy nghiệm của hệ là: $\ 0,0,1\ ,\ \ 0,0,2\ ,\ \ 0,-2,0\ ,\ \ 0;4;0\ $ và

$\left(\dfrac{8}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right).$

Ví dụ 4: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$



Hình 3.24

(*)

a) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có 2 nghiệm phân biệt.

b) Giả sử hệ có nghiệm là $x_1;y_1$ và $x_2;y_2$.

Chứng minh rằng $x_2 - x_1{}^2 + y_2 - y_1{}^2 \le 1$

Lời giải (hình 3.24)

Ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + a\ \ y - 1 = 0 & (1) \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$

Xét hệ trục tọa độ Oxy. Khi đó phương trình (1) là phương trình đường thẳng Δ ,luôn qua điểm cố định có tọa độ $0;1$. Phương trình (2) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ bán kính $R = \dfrac{1}{2}$.

a) Ta có số giao điểm của đường thẳng Δ và đường tròn (C) là số nghiệm của hệ phương trình.

Vậy để hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$d\ \ I;\Delta\ = \frac{\left|\dfrac{1}{2} + m.0 - m\right|}{\sqrt{1 + m^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$$

b) Ta có $x_1;y_1$ và $x_2;y_2$ là 2 nghiệm của hệ suy ra đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm $A\ \ x_1;y_1$ và $B\ \ x_2;y_2$

Ta có $AB = \sqrt{x_2 - x_1{}^2 + y_2 - y_1{}^2}$

Mặt khác ta có $AB \le 2R = 2.\dfrac{1}{2} = 1$

Vậy $x_2 - x_1{}^2 + y_2 - y_1{}^2 \le 1$

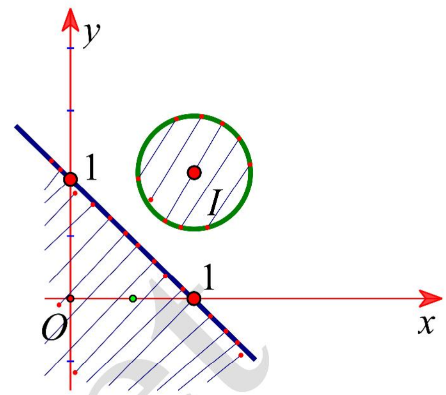
Ví dụ 5: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 \\ x + y \leq 1 \end{cases} \quad *$$

Lời giải (hình 3.25)

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2xy + m} \geq 1 - x - y \\ x + y \leq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + m \geq \ 1 - x - y \ ^2 \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$



Hình 3.25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + m \geq 1 + x^2 + y^2 - 2x + 2xy - 2y \\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq m + 1 & 1 \\ x + y \leq 1 & 2 \end{cases}$$

Xét hệ toạ độ trục Oxy. Ta có những điểm $M \ \ x;y$ thỏa mãn (1) là những điểm nằm trên và trong đường tròn tâm $I \ \ 1;1$ bán kính $R = \sqrt{m+1}$ (như hình vẽ), những điểm $M \ \ x;y$ thỏa mãn (2) là miền gạch chéo và đường thẳng $x + y = 1$.

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $d \ \ I;\Delta \ \ = R$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{m+1} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.