

**Bài toán 02: SỬ DỤNG PHÉP QUAY ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN DỰNG HÌNH.**

**Phương pháp:**

Xem điểm cần dựng là giao của một đường có sẵn và ảnh của một đường khác qua phép quay  $Q_{(I;\alpha)}$  nào đó.

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho điểm A và hai đường thẳng  $d_1, d_2$ . Dựng tam giác ABC vuông cân tại A sao cho  $B \in d_1, C \in d_2$ .

**Lời giải.**

**Phân tích:**

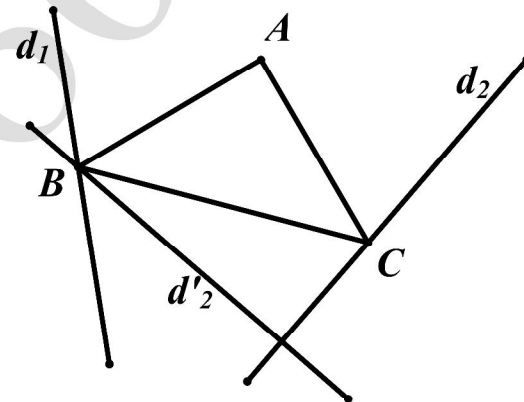
Giả sử đã dựng được tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ta có thể giả sử  $(AB, AC) = 90^\circ$ , khi

đó  $Q_{(A; -90^\circ)}(C) = B$ , mà  $C \in d_2$  nên

$B \in d_2'$  với  $d_2' = Q_{(A; -90^\circ)}(d_2)$ .

Lại có  $B \in d_1$  nên  $B = d_1 \cap d_2'$ .



**Cách dựng:**

- Dựng đường thẳng  $d_2'$  ảnh của  $d_2$  qua  $Q_{(A; -90^\circ)}$ .
- Dựng giao điểm  $B = d_1 \cap d_2'$ .
- Dựng đường thẳng qua A vuông góc với AB cắt  $d_2$  tại C.

Tam giác ABC là tam giác cần dựng.

**Chứng minh:**

Từ cách dựng suy ra  $Q_{(A; 90^\circ)}(B) = C$  nên  $AB = AC$  và  $BAC = 90^\circ$  do đó tam giác ABC vuông cân tại A.

**Biện luận:**

- Nếu  $d_1, d_2$  không vuông góc thì có một nghiệm hình.
- Nếu  $d_1 \perp d_2$  và  $A$  nằm trên đường phân giác của một trong các góc tạo bởi  $d_1, d_2$  thì có vô số nghiệm hình.
- Nếu  $d_1 \perp d_2$  và  $A$  không nằm trên đường phân giác của một trong các góc tạo bởi  $d_1, d_2$  thì bài toán vô nghiệm hình.

**Ví dụ 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $(AB, AC) = \alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) và một điểm  $M$  nằm trên cạnh  $AB$ . Dựng trên các đường thẳng  $CB, CA$  các điểm  $N, P$  sao cho  $MN = MP$  và đường tròn  $(AMP)$  tiếp xúc với  $MN$ .

**Lời giải.**

**Phân tích:**

Giả sử đã dựng được các điểm  $N, P$  sao cho  $N \in BC, P \in AC$  sao cho  $MN = MP$  và đường tròn  $(AMP)$  tiếp xúc với  $MN$ . Khi đó do  $MN$  tiếp xúc với đường tròn  $(AMP)$  nên  $\angle PMN = \angle A = \alpha$ . Từ đó ta có  $(MP; MN) = -\alpha$  lại có  $MP = MN$  nên  $Q_{(M, -\alpha)}(P) = N$ .

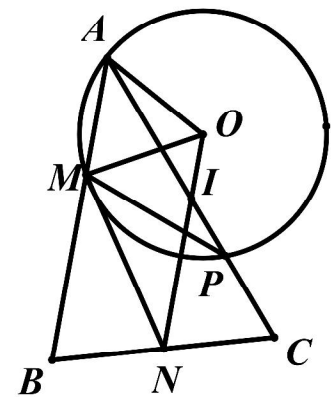
Giả sử  $O = Q_{(M, -\alpha)}(A)$  và  $I = ON \cap AC$ .

Theo tính chất phép quay ta có

$$\angle NIC = (\angle ON, \angle AP) = \alpha \Rightarrow \angle NIC = \angle BAC \Rightarrow IN \parallel AB.$$

**Cách dựng:**

- Dựng điểm  $O = Q_{(M, -\alpha)}$
  - Dựng đường thẳng qua  $O$  song song với  $AB$  cắt  $BC$  tại  $N$
  - Dựng tia  $MP$  cắt  $AC$  tại  $P$  sao cho  $\angle NMP = \alpha$
- Như vậy các điểm  $N, P$  là các điểm cần dựng.



*Chứng minh:*

Vì  $ON \parallel AB$  nên  $\angle AMO = \angle MON = \alpha \Rightarrow \angle PMN = \angle MAP = \alpha$  suy ra đường tròn  $(AMN)$  tiếp xúc với  $MN$ . Ta có  $Q_{(M, -\alpha)} : MP \rightarrow MN$  nên  $MP = MN$ .

*Biện luận:* Bài toán có một nghiệm hình duy nhất.