Bài toán 02: ỨNG DỤNG PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRONH BÀI TOÁN CHỨNG MINH THẲNG HÀNG VÀ ĐỒNG QUY.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(O;R)$ nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB lần lượt tại A_1,B_1,C_1. Gọi A_2,B_2,C_2 là các giao điểm thứ hai của AA_1,BB_1,CC_1 với (O), M,N,P lần lượt là trung điểm của B_1C_1,C_1A_1,A_1B_1.
Chứng minh:
a) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác MA_1A_2,NB_1B_2,PC_1C_2 đi qua O.
b) Ba đường tròn trên có điểm chung thứ hai.

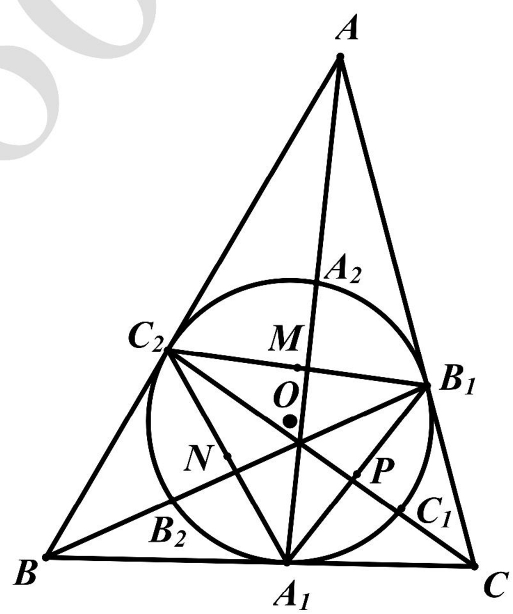
Lời giải.

a) Để chứng minh đường tròn ngoại tiếp các tam giác MA_1A_2,NB_1B_2, PC_1C_2 đi qua O. Ta chỉ ra có phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó biến các đường tròn này thành đường thẳng.

Xét phép nghích đảo $f_O^{R^2}$.

Dễ thấy A,M,O thẳng hàng, tam giác AB_1O vuông tại B_1 có đường cao B_1M nên $\overline{OM}.\overline{OA}=OB_1^2=R^2$ $\Rightarrow f_O^{R^2}:M\to A$. Mặt khác

Mặt khác $(O;R)$ là đường tròn nghịch đảo của $f_O^{R^2}$ nên mọi điểm của (O) đều là điểm kép. Do đó $\Rightarrow f_O^{R^2}:A_1\to A_1,A_2\to A_2$. Vậy đường tròn (MA_1A_2) có ảnh đi qua A,A_1,A_2. Đây là một đường thẳng nên (MA_1A_2) phải đi qua cực O.



Tương tự các đường tròn $(NBB_1),(PCC_1)$ cũng đi qua O.

b) Để chứng minh ba đường tròn trên có chung điểm thứ hai ta chỉ cần chứng minh ba đường thẳng ảnh AA_1,BB_1,CC_1 đồng quy.

Dễ thấy $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}=-1$ nên theo định lí cesva thì AA_1,BB_1,CC_1 đồng quy tại điểm I, khi đó ba đường tròn trên cùng đi qua điểm I' là ảnh của I qua phép nghịch đảo $f_O^{R^2}$.

Ví dụ 2. Cho đường tròn (O) đường kính BC. Một điểm A nằm ngoài đường tròn. Gọi B_0,C_0 là các giao điểm của AC,AB với (O). Gọi M,N lần lượt là các tiếp điểm của tiếp tuyến vẽ từ A đến (O). Chứng minh H,M,N thẳng hàng.

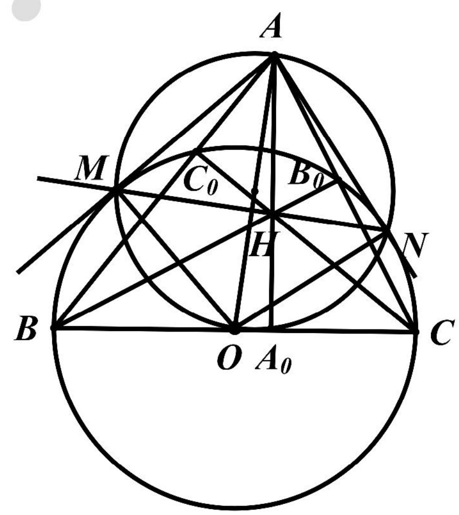
Lời giải.

Để chứng minh các điểm H,M,N thẳng hàng ta chứng minh nó là ảnh của ba điểm nằm trên một đường tròn đi qua cực trong một phép nghịch đảo nào đó.

Xét phép nghịch đảo cực A, phương tích $k=AM^2=AN^2$.

Ta có $f_A^{AM^2}:M\to M,N\to N$ nên

$f_A^{AM^2}:(AMN)\to MN$. Gọi A_0 là ảnh của H trong phép nghịch đảo này.



Để chứng minh H,M,N thẳng hàng ta cần chứng minh $A_0\in(AMN)$.

Mà $\overline{AH}.\overline{AA_0}=AN^2=\overline{AB_0}.\overline{AC}$ nên tứ giác A_0CB_0H nội tiếp $\Rightarrow HA_0C=CB_0H=90^0$, do đó điểm A_0 nhì đoạn OA dưới một góc vuông suy ra $A_0\in(AMN)$

vì vậy $f_A^{AM^2}(A_0)=H\in MN$, hay H,M,N thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho A,B,C,D là bốn điểm phân biệt nằm trên một đường thẳng và được sắp xếp theo thứ tự đó. Các đường tròn đường kính AC,BD cắt nhau tại các điểm X,Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng AB khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ hai M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại N. Chứng minh AM,DN,XY đồng quy.

Lời giải.

Để chứng minh ba đường thẳng đồng quy thường ta có hai hướng sau:

- Chứng minh nó là ảnh của ba đường tròn trong phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó mà ba đường tròn đó có điểm chung I khác O, khi đó ba đường thẳng này đồng quy tại $I' = f_O^k(I)$.
- Chứng minh hai đường thẳng là ảnh của hai đường tròn cắt nhau trong phép nghịch đảo cực O, phương tích k nào đó và đường còn lại đi qua cực O, đồng thời là trục đẳng phương của hai đường tròn đó, khi đó ba đường thẳng sẽ đồng quy tại điểm I' (I' là ảnh của giao điểm (khác cực)của hai đường tròn)

Dựa vào sự phân tích này ta có lời giải sau khá tự nhiên

Gọi $(C_1),(C_2)$ lần lượt là đường tròn đường kính AC và đường tròn đường kính BD và $A' = PA \cap (C_1), D' = PD \cap (C_2)$. Do P nằm trên XY (trục đẳng phương của (C_1) và (C_2)) nên $P_{P/(C_1)} = P_{P/(C_2)} \Rightarrow \overline{PB}.\overline{PN} = \overline{PC}.\overline{PM} = k$. Xét phép nghịc đảo cực P, phương tích k. Ta có

$f_P^k : M \mapsto C, A \mapsto A' \Rightarrow (PA'C) \mapsto AM$.

Tương tự $f_P^k : N \mapsto B, D \mapsto D' \Rightarrow (PBD') \mapsto NB$. Do $f_P^k : XY \mapsto XY$ nên để chứng minh AM, DN, XY đồng quy ta sẽ chứng minh XY là trục đẳng phương của hai đường tròn $(PA'C)$ và (PBD'). Do

$PZC = PA'C = 90^0 \Rightarrow Z \in (PA''C)$. Tương tự

$Z \in (PBD')$ suy ra PZ là trục đẳng phương của hai đường tròn $(PA'C)$ và (PBD').

Vậy AM, DN, XY đồng quy.