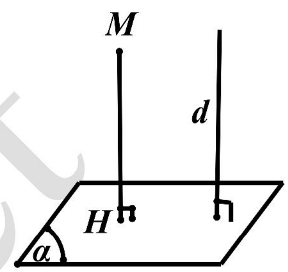
Bài toán 02: TÍNH KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG.

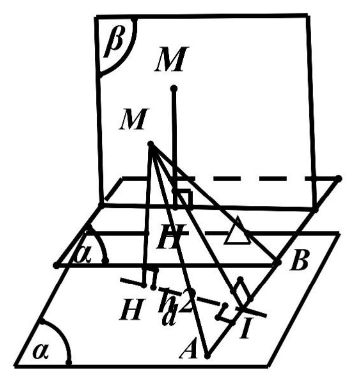
Phương pháp:

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α). Để xác định được vị trí hình chiếu này ta có một số lưu ý sau:



h1

- Nếu có $d \perp (\alpha)$ thì $MH // d$ (h1).
- Chọn (β) chứa điểm M, rồi xác định giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$. Trong (β) dựng $MH \perp \Delta \Rightarrow MH \perp (\alpha)$ (h2).
- Nếu trong (α) có hai điểm A, B sao cho $MA = MB$ thì trong (α) kẻ đường trung trực d của đoạn AB, rồi trong $mp(M,d)$ dựng $MH \perp d$. Khi đó $MH \perp (\alpha)$ (h3)



h3

Thật vậy, Gọi I là trung điểm của AB. Do $MA = MB$ nên ΔMAB cân tại $M \Rightarrow MI \perp AB \subset (\alpha)$. Lại có

$AB \perp d \Rightarrow AB \perp mp(M,d)$

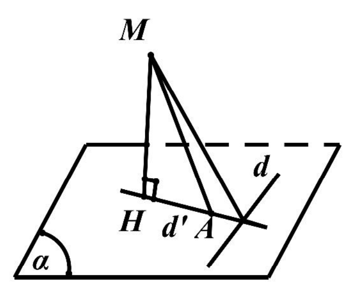
$\Rightarrow AB \perp MH$.

Vậy $\begin{cases} MH \perp AB \\ MH \perp d \end{cases} \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.

- Nếu trong (α) có một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A sao cho $MA \perp d$ thì trong (α) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d' \perp d$, rồi trong $mp(M,d')$ kẻ $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.(*h4*)

Thật vậy, do $d \perp d'$ và $d \perp MA \Rightarrow d \perp mp(M,d') \Rightarrow d \perp MH$

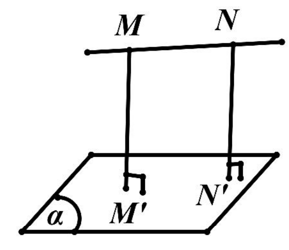
Lại có $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp mp(d,d') \equiv (\alpha)$.



h4

- Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, ..., A_n \, (n \geq 3)$ mà $MA_1 = MA_2 = ... = MA_n$ hoặc các đường thẳng $MA_1, MA_2, ..., MA_n$ tạo với (α) các góc bằng nhau thì hình chiếu của M trên (α) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.

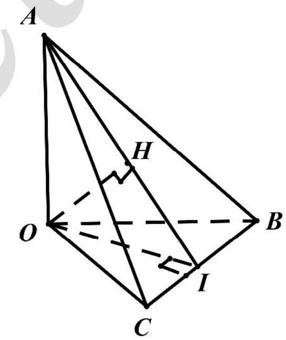
- Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, ..., A_n \left(n \ge 3\right)$ mà các mặt phẳng $\left(MA_1A_2\right), \left(MA_2A_3\right), ..., \left(MA_nA_1\right)$ thì hình chiếu của M là tâm đường tròn nội tiếp đa giác $A_1A_2...A_n$.
- Đôi khi, thay vì hình chiếu của điểm M xuống (α) ta có thể dựng hình chiếu một điểm N khác thích hợp hơn sao cho $MN // (\alpha)$. Khi đó $d\left(M,(\alpha)\right) = d\left(N,(\alpha)\right)$. (h5)



h5

d(M,(α))=d(N,(α))

- Một kết quả có nhiều ứng dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng đối với tứ diện vuông (tương tư như hệ thức lượng trong tam giác vuông) là:
- Nếu tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.



Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

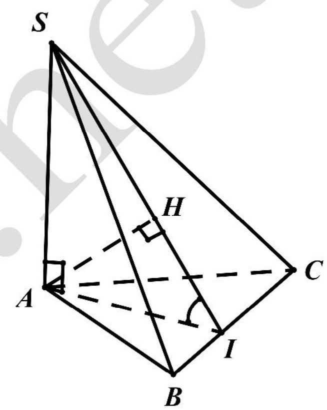
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp BC$

Vậy $\widehat{AIS}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

$\Rightarrow \widehat{AIS} = 60^0$.

Trong (SBC) kẻ $AH \perp SI$.



Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = AH$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

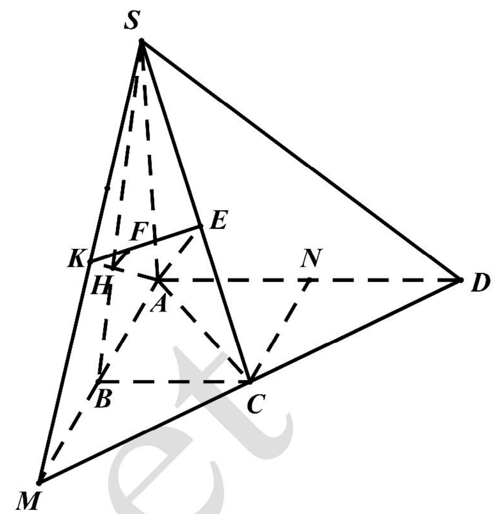
Trong tam giác AIS ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AI^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{h^2} = \dfrac{4h^2 + 3a^2}{3a^2h^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Hay $d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải.



Trong $(ABCD)$ gọi $M = AB \cap CD$, trong (SAM) gọi $K = AH \cap SM$, kẻ $AE \perp SC$ tại E và gọi N là trung điểm của AD.
Dễ thấy $ABCN$ là hình vuông nên $NC = AB = a$.
Do đó $NA = NC = ND = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C
$\Rightarrow CD \perp AC$, lại có $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$
$\Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.

Vậy $\begin{cases} (SAC) \perp (SCD) \\ (SAC) \cap (SCD) = SC \\ AE \subset (SAC) \\ AE \perp SC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SCD) \quad (1)$

Trong (AKE) kẻ $HF // AE, F \in KE$, thì từ (1) suy ra $HF \perp (SCD)$
$\Rightarrow d(H,(SCD)) = HF$.

Do $BC // AD \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MA = 2AB = 2a \Rightarrow B$ là trung điểm của MA.

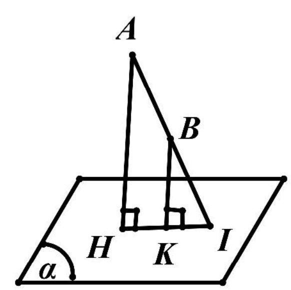
Lại có $\dfrac{BH}{BS} = \dfrac{BH.BS}{BS^2} = \dfrac{BA^2}{AB^2 + AS^2} = \dfrac{a^2}{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy H là trọng tâm của tam giác SAM, do đó $\dfrac{HF}{AE} = \dfrac{KH}{KA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HF = \dfrac{1}{3}AE$.
Tứ diện $ADMS$ có ba cạnh AD, AM, AS đôi một vuông góc và

$AE \perp (SMD)$ nên $\dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AS^2}$

$= \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AE = a$.

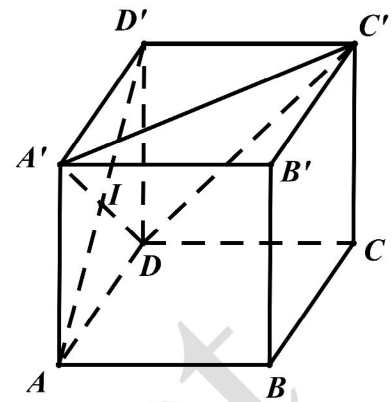
Vậy $\Rightarrow d(H,(SCD)) = HF = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{a}{3}$.



Nhận xét: Từ bài trên ta thấy nếu đường thẳng AB cắt (α) tại I thì $\dfrac{d(A,(\alpha))}{d(B,(\alpha))} = \dfrac{IA}{IB}$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thức $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

Lời giải.



Gọi I là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ thì I là trung điểm của AD'.

Ta có $\dfrac{d\left(A,\left(DA'C'\right)\right)}{d\left(D',\left(DA'C'\right)\right)}=\dfrac{IA}{ID'}=1$

$\Rightarrow d\left(A,\left(DA'C'\right)\right)=d\left(D',\left(DA'C'\right)\right)$.

Mặt khác ta có tứ diện $D'ADC'$ có các cạnh $D'D, D'A', D'C'$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{d^2\left(D',\left(DA'C'\right)\right)}=\frac{1}{D'D^2}+\frac{1}{D'A'^2}+\frac{1}{D'C'^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}.$$

Vậy $d\left(A,\left(DA'C'\right)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a, các góc $BAA'=BAD=DAA'=60^0$. Tính khoảng cách từ A' đến $\left(ABCD\right)$.

Lời giải.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và $BAA'=BAD=DAA'=60^0$ nên các tam giác ABA', ABD, ADA' đều là các tam giác đều cạnh $a \Rightarrow A'A=A'B=A'D$ (A' cách đều ba đỉnh của ΔABD)

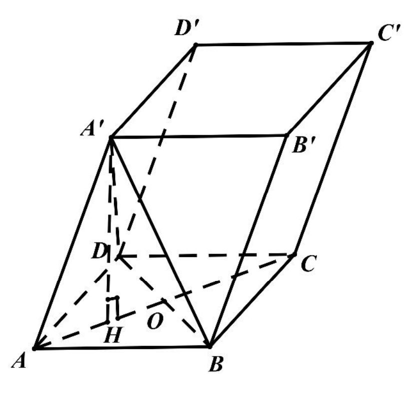
Gọi H là hình chiếu của A' trên $\left(ABCD\right)$ thì các tam giác vuông $A'HA, A'HB, A'HD$ bằng nhau nên $HA=HB=HD$ suy ra H là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABD.

Gọi O giao điểm của AC và BD, ta có

$AH=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$

$=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.



Vậy $d\left(A',\left(ABCD\right)\right)=A'H=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, tam giác SAD đều và có cạnh bằng $2a$, $BC=3a$ các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $\left(ABCD\right)$.

Lời giải.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên $\left(ABCD\right)$, Gọi I_1,I_2,I_3,I_4 lần lượt là hình chiếu của I trên các cạnh AB,BC,CD,DA thì các góc $II_iS\left(i=1,4\right)$ là góc giữa các mặt bên và mặt đáy do đó chúng bằng nhau,suy ra các tam giác vuông SII_1,SII_2,SII_3,SII_4 bằng nhau nên $II_1=II_2=II_3=II_4\Rightarrow$ I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang $ABCD$.

Vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB+DC=AD+BC=5a$

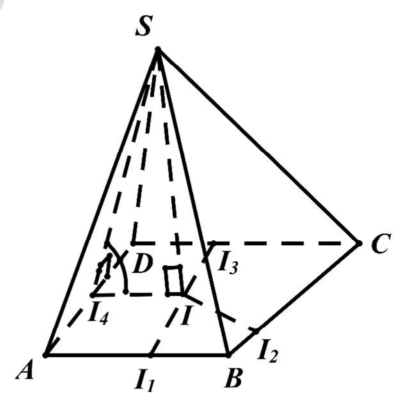
Diện tích hình thang $ABCD$ là $S=\frac{1}{2}\left(AB+DC\right)AD=\frac{1}{2}.5a.2a=5a^2$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang $ABCD$ thì

$$p=\frac{AB+DC+AD+BC}{2}=\frac{10a}{2}=5a$$

$$S=pr\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{5a^2}{5a}=a\Rightarrow II_4=r=a.$$

Tam giác SAD đều và có cạnh $2a$ nên



$SI_4=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}\Rightarrow SI=\sqrt{SI_4{}^2-II_4{}^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$ Vậy $d\left(S,\left(ABCD\right)\right)=SI=a\sqrt{2}$.