

☒ **DẠNG 2: Bài toán liên quan đến góc giữa hai đường thẳng.**
1. Phương pháp giải:

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ có phương trình

$$(\Delta_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 \neq 0$$

$$(\Delta_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_2^2 + b_2^2 \neq 0$$

được xác định theo công thức:

$$\cos \Delta_1, \Delta_2 = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

- Để xác định góc giữa hai đường thẳng ta chỉ cần biết véc tơ chỉ phương (hoặc vectơ pháp tuyến) của chúng

$$\cos \Delta_1, \Delta_2 = \left| \cos \vec{u}_1, \vec{u}_2 \right| = \left| \cos \vec{n}_1, \vec{n}_2 \right|.$$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Xác định góc giữa hai đường thẳng trong các trường hợp sau:

a) $\Delta_1: 3x - 2y + 1 = 0;$ $\Delta_2: \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 5t \end{cases} \quad t \in R$

b) $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in R$ $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases} \quad t' \in R$

Lời giải:

a) $\vec{n}_1: 3; -2$, $\vec{n}_2: 5; 1$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_1

và Δ_2 suy ra $\cos \Delta_1, \Delta_2 = \frac{|3 \cdot 5 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do đó $\Delta_1; \Delta_2 = 45^\circ$

b) $\vec{u}_1: -1; 2$, $\vec{u}_2: -4; -2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ_1 và Δ_2 suy ra

$$\cos \Delta_1, \Delta_2 = \frac{|-1 \cdot -4 + 2 \cdot -2|}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{8}} = 0 \text{ do đó } \Delta_1; \Delta_2 = 90^\circ$$

Ví dụ 2: Tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1: \sqrt{3}x - y + 7 = 0$ và

$\Delta_2: mx + y + 1 = 0$ một góc bằng 30°

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|m\sqrt{3} - 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{m^2 + 1^2}}$$

Theo bài ra góc hợp bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 bằng 30° nên

$$\cos 30^\circ = \frac{|m\sqrt{3} - 1|}{2 \cdot \sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|m\sqrt{3} - 1|}{2 \cdot \sqrt{m^2 + 1}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2 + 1)} = |m\sqrt{3} - 1|$$

Hay

$$3(m^2 + 1) = (m\sqrt{3} - 1)^2 \Leftrightarrow 3m^2 + 3 = 3m^2 - 2m\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy $m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho đường thẳng $d : 3x - 2y + 1 = 0$ và $M(1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M và tạo với d một góc 45° .

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua M có dạng

$$\Delta : a(x - 1) + b(y - 2) = 0, a^2 + b^2 \neq 0 \text{ hay } ax + by - a - 2b = 0$$

Theo bài ra Δ tạo với d một góc 45° nên:

$$\cos 45^\circ = \frac{|3a + (-2b)|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|3a - 2b|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{26(a^2 + b^2)} = 2|3a - 2b| \Leftrightarrow 5a^2 - 24ab - 5b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5b \\ 5a = -b \end{cases}$$

+ Nếu $a = 5b$, chọn $a = 5, b = 1$ suy ra $\Delta : 5x + y - 7 = 0$

+ Nếu $5a = -b$, chọn $a = 1, b = -5$ suy ra $\Delta : x - 5y + 9 = 0$

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn $\Delta_1 : x - 5y + 9 = 0$ và

$$\Delta_2 : 5x + y - 7 = 0$$

Ví dụ 4: Cho 2 đường thẳng $\Delta_1 : 2x - y + 1 = 0; \Delta_2 : x + 2y - 7 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng Δ qua gốc tọa độ sao cho Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 tam giác cân có đỉnh là giao điểm Δ_1 và Δ_2 .

Lời giải:

Đường thẳng Δ qua gốc tọa độ có dạng $ax + by = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$

Theo giả thiết ta có $\cos \Delta; \Delta_1 = \cos \Delta; \Delta_2$ hay

$$\frac{|2a - b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a + 2b|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = a + 2b \\ b - 2a = a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ 3a = -b \end{cases}$$

+ Nếu $a = 3b$, chọn $a = 3, b = 1$ suy ra $\Delta : 3x + y = 0$

+ Nếu $3a = -b$, chọn $a = 1, b = -3$ suy ra $\Delta : x - 3y = 0$

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_1 : 3x + y = 0$ và

$$\Delta_2 : x - 3y = 0$$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.63: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng d_1 và d_2 trong các trường hợp sau:

$$a) d_1 : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}; d_2 : 3x + 2y - 2 = 0$$

$$b) d_1 : x + my - 1 = 0; d_2 : x - y + 2m - 1 = 0$$

Bài 3.64: Viết phương trình đường thẳng d đi qua M và tạo với Δ một góc α biết:

$$a) M(-2; -1); \Delta : 3x + 2y - 1 = 0; \alpha = 30^\circ$$

$$b) M(4; 1); \Delta \equiv Oy; \alpha = 60^\circ$$

Bài 3.65 : Cho hình vuông có đỉnh $A(-4; 5)$ và một đường chéo nằm trên đường thẳng có phương trình $7x - y + 8 = 0$. Lập phương trình các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông.

Bài 3.66: Cho ΔABC cân đỉnh A . Biết phương trình các đường thẳng AB, BC là $AB : x + y + 1 = 0; BC : 2x - 3y - 5 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng AC biết nó đi qua $M(1; 1)$.

Bài 3.67: Cho ΔABC đều biết: $A(2; 6)$ và $BC : \sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$.

Viết phương trình các cạnh còn lại.

Bài 3.68. Cho tam giác ABC có cả ba góc đều nhọn. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC của tam giác, biết tọa độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C tương ứng là $A'(-1; -2), B'(2; 2), C'(-1; 2)$

Bài 3.69: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho các điểm

$A(1; 2)$, $B(4; 3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\angle MAB = 135^\circ$ và khoảng

cách từ M đến đường thẳng AB bằng $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Bài 3.70: Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hình thang cân $ABCD$

($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Biết $A(0; 2)$, $D(-2; -2)$ và I nằm trên đường thẳng

$x + y - 4 = 0$ sao cho $\angle AID = 45^\circ$ (với $I = AC \cap BD$). Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình thang.