

Vấn đề 2. Xét tính liên tục của hàm số trên một tập

Phương pháp: Sử dụng các định lý về tính liên tục của hàm đa thức, lượng giác, phân thức hữu tỉ ...

Nếu hàm số cho dưới dạng nhiều công thức thì ta xét tính liên tục trên mỗi khoảng đã chia và tại các điểm chia của các khoảng đó.

Các ví dụ

Ví dụ 1 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên toàn trục số:

1. $f(x) = \tan 2x + \cos x$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + 2}{x^2 - 3x + 2}$

Lời giải.

1. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Vậy hàm số liên tục trên D

2. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Vậy hàm số liên tục trên $(1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ví dụ 2 Xác định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2(x-2) & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+2} - 2 & \\ (1-a)x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục trên \mathbb{R} .

Lời giải.

Hàm số xác định trên \mathbb{R}

Với $x < 2 \Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x > 2 \Rightarrow$ hàm số liên tục

Với $x = 2$ ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-a)x = 2(1-a) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{a^2(x-2)}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} a^2(\sqrt{x+2} + 2) = 4a^2$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4a^2 = 2(1-a) \Leftrightarrow a = -1, a = \frac{1}{2}.$$

Vậy $a = -1, a = \frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xác định tính liên tục của hàm số sau trên \mathbb{R}

1. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$ 2. $f(x) = \sqrt{3x^2-1}$ 3.

$f(x) = 2\sin x + 3\tan 2x$

Bài 2 Xét tính liên tục của các hàm số sau trên \mathbb{R}

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{khi } x < 2 \\ 2x^3 - 16 & \\ 2 - x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \sqrt{x-1} & \\ \frac{\sqrt[3]{1-x+2}}{x+2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$

Bài 3 Xét tính liên tục hàm số sau trên \mathbb{R}

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 0 \\ (x-1)^3 & \text{khi } 0 < x < 2 \\ \sqrt{x}-1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ 4. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{khi } |x| \leq 1 \\ 3x-1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$.

Bài 4. Xác định a, b để các hàm số sau liên tục trên \mathbb{R}

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ ax + b & \text{khi } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x(x-2)} & \text{khi } x(x-2) \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 2 \\ b & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

Bài 5. Tìm m để các hàm số sau liên tục trên \mathbb{R}

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2} + 2x - 1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m - 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2 + 3m + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4} + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2 - 2mx + 3m + 2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.