Bài toán 02: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA (α) VỚI HÌNH CHÓP KHI BIẾT (α) VỚI MỘT MẶT PHẲNG (β) CHO TRƯỚC..

Phương pháp:

- Để xác định thiết diện trong trường hợp này ta sử dụng các tính chất sau.
- Khi $(\alpha) /\!/ (\beta)$ thì (α) sẽ song song với tất cả các đường thẳng trong (β) và ta chuyển về dạng thiết diện song song với đường thẳng (§3)

Sử dụng $\begin{cases}(\alpha) /\!/ (\beta)\\(\beta) /\!/ (\gamma)\\(\beta)\cap(\gamma)=d\\M\in(\alpha)\cap(\gamma)\end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(\gamma)=d' /\!/ d, M\in d'$.

- Tìm đường thẳng d mằn trong (β) và xét các mặt phẳng có trong hình chóp mà chứa d, khi đó $(\alpha) /\!/ d$ nên sẽ cắt các mặt phẳng chứa d (nếu có) theo các giao tuyến song song với d.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}M\in(SAB)\cap(\alpha)\\(SAB)\cap(SAD)=SA\end{cases}$

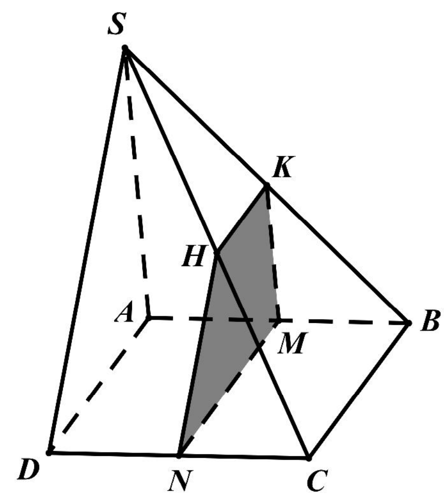
$\Rightarrow (SAB)\cap(\alpha)=MK /\!/ SA, K\in SB$.

Tương tự $\begin{cases}N\in(SCD)\cap(\alpha)\\(\alpha) /\!/ (SAD)\\(SCD)\cap(SAD)=SD\end{cases}$

$\Rightarrow (SCD)\cap(\alpha)=NH /\!/ SD, H\in SC$.

Dễ thấy $HK=(\alpha)\cap(SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD),(SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là



MN, HK, BC, mà $MN /\!/ BC \Rightarrow MN /\!/ HK$. Vậy thiết diện là một hình thang .

Ví dụ 2. Cho hìh chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O có $AC=a, BD=b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC và $AI=x$ $(0<x<a)$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

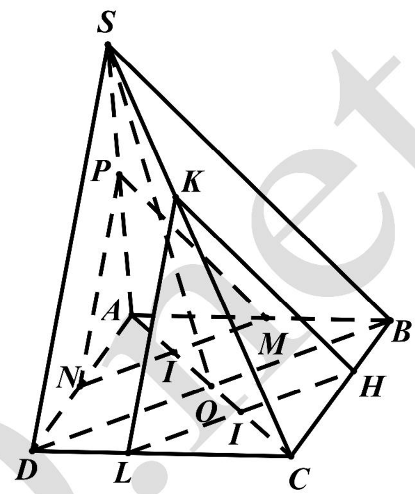
b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và x.

Lời giải.

a) ***Trường hợp 1.*** Xét I thuộc đoạn OA

Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN \parallel BD, I \in MN$.



Tương tự $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAD) \cap (SBD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = NP \parallel SD, P \in SN$.

Thiết diện là tam giác MNP.

Do $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (SAB) \cap (SBD) = SB \\ (SAB) \cap (\alpha) = MP \end{cases} \Rightarrow MP \parallel SB$. Hai tam giác MNP và BDS có các cặp cạnh tương ứng song song nên chúng đồng dạng, mà BDS đều nên tam giác MNP đều.

Trường hợp 2. Điểm I thuộc đoạn OC, tương tự trường hợp 1 ta được thiết diện là tam giác đều HKL như (hv).

b) ***Trường hợp 1.*** I thuộc đoạn OA

Ta có $S_{BCD} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{S_{MNP}}{S_{BCD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$

Do $MN \parallel BD \Rightarrow \dfrac{MN}{BD} = \dfrac{AI}{AO} = \dfrac{2x}{a} \Rightarrow S_{MNP} = \left(\dfrac{2x}{a}\right)^2 S_{BCD} = \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Trường hợp 2. I thuộc đoạn OC, tính tương tự ta có

$S_{MNP} = \left(\dfrac{HL}{BD}\right)^2 S_{BCD} = [\dfrac{2(a-x)}{a}]^2 \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Vậy $S_{td} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}; I \in (OA) \\ \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}; I \in (OC) \end{cases}$.