Bài toán 02: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC.

Phương pháp:

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng , rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

$((\alpha),(\beta)) = 90^0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Cách 2. Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Cách 3. Tìm hai vec tơ $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$ lần lượt vuông góc với các mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ rồi chứng minh $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$.

Các ví dụ

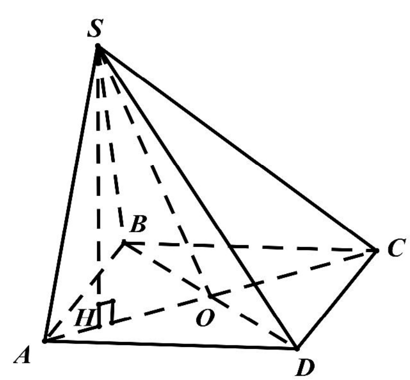
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng b.

a) Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Tính đường cao của hình chóp $S.ABCD$ theo a, b.

c) Tìm sự liên hệ giữa a và b để $S.ABCD$ là một hình chóp đều.

Lời giải.



a) Gọi $O = AC \cap BD$, vì tứ giác $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b nên nó là một hình thoi, vì thế $AC \perp BD$ và O là trung điểm của BD.

Mặt khác $SB = SD = b \Rightarrow \Delta SBD$ cân tại S, do đó $SO \perp BD$.

Vậy $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

b) Ta có $\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \end{cases}$ nên trong (SAC) kẻ $SH \perp AC, H \in AC$ thì $SH \perp (ABCD)$, hay SH là đường cao của hình chóp.

Do hình chóp có các cạnh $SB = SD = b, CB = Cd = b, AB = AD = b$ nên các tam giác SBD, CBD, ABD là các tam giác cân bằng nhau suy ra $OS = OA = OC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S. Từ đó ta có $SH.AC = SA.SC \Rightarrow SH = \frac{SA.SC}{AC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

b) Hình chóp $S.ABCD$ là một hình chóp đều. thì các cạnh bên bằng nhau nên $a = b$.

Và khi $a = b$ thì $AC = a\sqrt{2}$ mà $ABCD$ là hình thoi cạnh a nên nó là hình vuông, tứ đó $S.ABCD$ là một hình chóp đều.

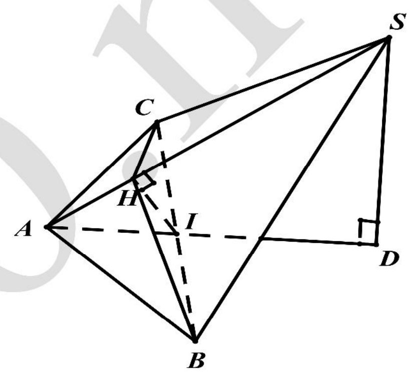
Vậy $S.ABCD$ là một hình chóp đều khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d \perp (ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ và I cũng là trung điểm của AD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.



Dựng $IH \perp SA, H \in SA$, khi đó ta có $\begin{cases} SA \perp IH \\ SA \perp CB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (HCB)$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là BHC.

Ta có $\Delta AHI \sim \Delta ADS \Rightarrow \dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AI}{AD}$.

Mà $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}$,

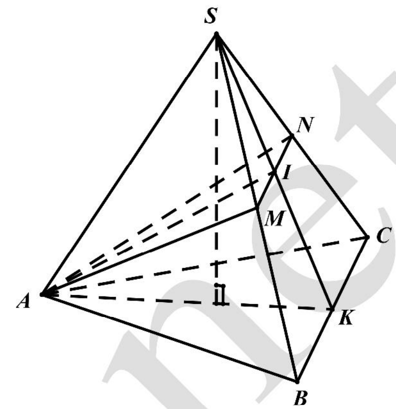
$SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ suy ra

$$IH = \frac{AI.SD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow BHC = 90^0.$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$. **(ĐH khối A-2002)**

Lời giải.

Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$. Từ giả thiết ta có $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, MN//BC \Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN. Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow$ hai trung tuyến tương ứng $AM = AN \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại $A \Rightarrow AI \perp MN$.



Mặt khác $\begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases}$

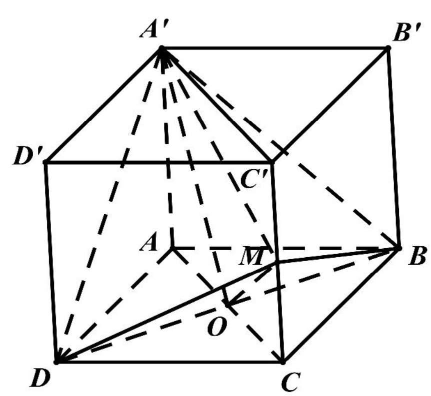
$\Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK \Rightarrow \Delta SAK$ cân tại $A \Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Ta có $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Ví dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau. **(ĐH khối A-2003)**



Lời giải.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD = (A'BD) \cap (MBD)$,

$\begin{cases} AC \perp BD \\ AA' \perp BD \end{cases} \Rightarrow (ACC'A') \perp BD$

Vậy $\begin{cases} (ACC'A') \perp BD \\ (ACC'A') \cap (A'BD) = OA' \\ (ACC'A') \cap (MBD) = OM \end{cases}$ do đó góc giữa hai đường thẳng OM, OA' chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD).

Ta có $OM = \frac{AC'}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$.

$OA'^2 = AO^2 + AA'^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{a^2}{2} + b^2$.

$MA'^2 = A'C'^2 + MC'^2 = a^2 + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{5b^2}{4}$.

Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \Delta OMA'$ vuông tại $O \Leftrightarrow OM^2 + OA'^2 = MA'^2 \Leftrightarrow \frac{2a^2+b^2}{4} + \left(\frac{a^2}{2} + b^2\right) = \left(a^2 + \frac{5b^2}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$

$(A'BD) \perp (MBD)$ khi $\frac{a}{b} = 1$ (Khi đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương)