Bài toán 02: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

Phương pháp:

Để chứng minh hai đường thẳng song song ta có thể làm theo một trong các cách sau:

- Chứng minh chúng cùng thuộc một mặt phẳng rồi dùng các phương pháp chứng minh hai đường thẳng song song trong mặt phẳng.
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song vơi đường thẳng thứ ba.
- Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.
- Sử dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh MN song song với CD.

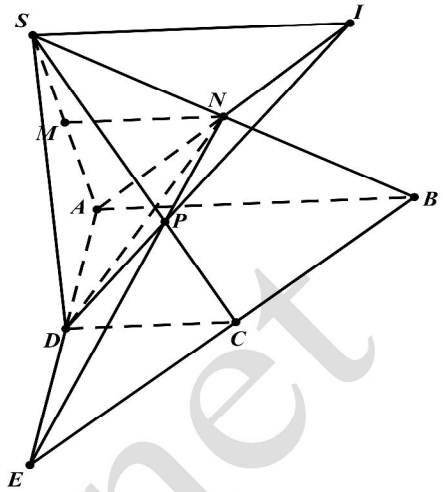
b) Gọi P là giao điểm của SC và (ADN), I là giao điểm của AN và DP. Chứng minh SI song song với CD.

Lời giải.

a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN // AB$.

Lại có $ABCD$ là hình thang $\Rightarrow AB//CD$.

Vậy $\begin{cases} MN // AB \\ CD // AB \end{cases} \Rightarrow MN // CD$.



b) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AD \cap BC$, trong (SCD) gọi $P = SC \cap EN$.

Ta có $E \in AD \subset (ADN)$

$\Rightarrow EN \subset (AND) \Rightarrow P \in (ADN)$.

Vậy $P = SC \cap (ADN)$.

Do $I = AN \cap DP \Rightarrow \begin{cases} I \in AN \\ I \in DP \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SAB) \\ I \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Ta có $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI // CD$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q.

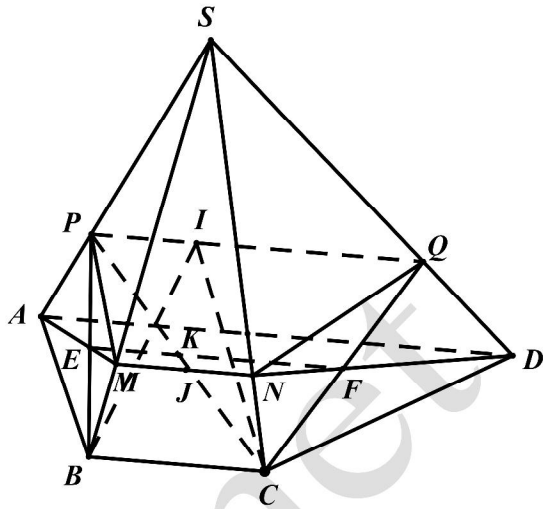
a) Chứng minh MN song sonng với PQ.

b) Giải sử AM cắt BP tại E; CQ cắt DN tại F. Chứng minh EF song song với MN và PQ. Tính EF theo a, b.

Lời giải.

a) Ta có $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$.

Vậy $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \\ AD \,//\, BC \\ (SAD) \cap (IBC) = PQ \end{cases}$



$\Rightarrow PQ \,//\, AD \,//\, BC \quad (1)$

Tương tự

$J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (ADJ)$

Vậy $\begin{cases} AD \subset (ADJ) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ (SBC) \cap (ADJ) = MN \end{cases}$

$\Rightarrow MN \,//\, AD \,//\, BC \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MN \,//\, PQ$.

b) Ta có $E = AM \cap BP \Rightarrow \begin{cases} E \in (AMND) \\ E \in (PBCQ) \end{cases}$; $F = DN \cap CQ \Rightarrow \begin{cases} F \in (AMND) \\ F \in (PBCQ) \end{cases}$

Do đó $EF = (AMND) \cap (PBCQ)$. Mà $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ MN \,//\, PQ \end{cases} \Rightarrow EF \,//\, AD \,//\, BC \,//\, MN \,//\, PQ$

.

Tính EF: Gọi $K = CP \cap EF \Rightarrow EF = EK + KF$

Ta có $EK \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{EK}{BC} = \dfrac{PE}{PB} \quad (1)$, $PM \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{PM}{AB}$

Mà $\dfrac{PM}{AB} = \dfrac{SP}{SA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{PE}{EB} = \dfrac{2}{3}$.

Từ (1) suy ra $\frac{EK}{BC}=\frac{PE}{PB}=\frac{PE}{PE+EB}=\frac{1}{1+\frac{EB}{PE}}=\frac{2}{5}\Rightarrow EK=\frac{2}{5}BC=\frac{2}{5}b$

Tương tự $KF=\frac{2}{5}a$. Vậy $EF=EK+KF=\frac{2}{5}(a+b)$.