

## Vấn đề 2. Tìm giới hạn của hàm số

**Bài toán 01:** Tìm  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  biết  $f(x)$  xác định tại  $x_0$ .

**Phương pháp:**

- \* Nếu  $f(x)$  là hàm số cho bởi một công thức thì giá trị giới hạn bằng  $f(x_0)$
- \* Nếu  $f(x)$  cho bởi nhiều công thức, khi đó ta sử dụng điều kiện để hàm số có giới hạn (Giới hạn trái bằng giới hạn phải).

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 3 \cos x + x}{2x + \cos^2 3x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{\sqrt[3]{x + 6} + 2x - 1}$

**Lời giải.**

1. Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 3 \cos x + x}{2x + \cos^2 3x} = \frac{\sin 0 + 3 \cos 0 + 0}{2 \cdot 0 + \cos^2 0} = 3$

2. Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{\sqrt[3]{x + 6} + 2x - 1} = \frac{\sqrt{2^2 + 3} - 2 \cdot 2}{\sqrt[3]{2 + 6} + 2 \cdot 2 - 1} = \frac{\sqrt{7} - 4}{5}$ .

**Ví dụ 2.** Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn đó?

1.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{3x + 2}{3} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$  khi  $x \rightarrow 1$ ;

2.  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  khi  $x \rightarrow 0$

**Lời giải.**

1. Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + 2}{3} = \frac{5}{3}$ .

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{5}{3}$ .

Vậy  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{5}{3}$ .

2. Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 + 3x + 1) = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Vậy hàm số  $f(x)$  không có giới hạn khi  $x \rightarrow 0$ .

**Ví dụ 3.** Tìm  $m$  để các hàm số:

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + mx + 2m + 1}{x + 1} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{2x + 3m - 1}{\sqrt{1-x} + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad \text{có giới hạn khi } x \rightarrow 0.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{1-x}} + mx + 1 & \text{khi } x < 1 \\ 3mx + 2m - 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{có giới hạn khi } x \rightarrow 1.$$

**Lời giải.**

$$1. \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + mx + 2m + 1}{x + 1} = 2m + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + 3m - 1}{\sqrt{1-x} + 2} = \frac{3m - 1}{3}$$

Hàm số có giới hạn khi  $x \rightarrow 0$  khi và chỉ khi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow 2m + 1 = \frac{3m - 1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

$$2. \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3mx + 2m - 1) = 5m - 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{1-x}} + mx + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -(x+2)\sqrt{1-x} + mx + 1 \right) = m + 1 \end{aligned}$$

Hàm số có giới hạn khi  $x \rightarrow 1$  khi và chỉ khi  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow 5m - 1 = m + 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

### CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

**Bài 1** Tìm giới hạn các hàm số sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan x + 1}{\sin x + 1}$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+2} - x + 1}{3x + 1}$$

$$4. D = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} + 1}{x - 2}.$$

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x^2+x+4}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 2x - 3 \cos x}{\tan x}$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2-x+1} - \sqrt[3]{2x+3}}{3x^2-2}$$

$$4. D = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sqrt[3]{3x+1} - 2}$$

**Bài 3** Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn đó?

$$1. f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 5x^2 + 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{khi } x \rightarrow 1$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x \rightarrow 2.$$

**Bài 4** Xét xem các hàm số sau có giới hạn tại các điểm chỉ ra hay không? Nếu có hãy tìm giới hạn đó?

$$1. f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -3x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \quad \text{tại } x = 1.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ 2x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x = 2.$$

**Bài 5**

1. Tìm a để hàm số sau có giới hạn khi  $x \rightarrow 2$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$$

2. Tìm a để hàm số sau có giới hạn tại  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 5ax^2 + 3x + 2a + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 + x + \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

**Bài 6** Tìm a để hàm số

$$1. f(x) = \begin{cases} 5ax^2 + 3x + 2a + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 + x + \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad \text{có giới hạn tại } x \rightarrow 0$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 1 \\ 2x^2 - x + 3a & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{có giới hạn khi } x \rightarrow 1.$$

**Bài toán 02.** Tìm  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  trong đó  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ .

Dạng này ta gọi là dạng vô định  $\frac{0}{0}$ .

Để khử dạng vô định này ta sử dụng định lí Bozu cho đa thức:

**Định lí:** Nếu đa thức  $f(x)$  có nghiệm  $x = x_0$  thì ta có:

$$f(x) = (x - x_0)f_1(x).$$

\* Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là các đa thức thì ta phân tích  $f(x) = (x - x_0)f_1(x)$  và

$g(x) = (x - x_0)g_1(x)$ . Khi đó  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ , nếu giới hạn này có dạng  $\frac{0}{0}$  thì

ta tiếp tục quá trình như trên.

**Chú ý:** Nếu tam thức bậc hai  $ax^2 + bx + c$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thì ta luôn có sự phân tích  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

\* Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là các hàm chứa căn thức thì ta nhân lượng liên hợp để chuyển về các đa thức, rồi phân tích các đa thức như trên.

Các lượng liên hợp:

1.  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

2.  $(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$

3.  $(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}) = a - b$

\* Nếu  $f(x)$  và  $g(x)$  là các hàm chứa căn thức không đồng bậc ta sử dụng phương pháp tách, chẳng hạn:

Nếu  $\sqrt[n]{u(x)}, \sqrt[m]{v(x)} \rightarrow c$  thì ta phân tích:

$$\sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[m]{v(x)} = (\sqrt[n]{u(x)} - c) - (\sqrt[m]{v(x)} - c).$$

Trong nhiều trường hợp việc phân tích như trên không đi đến kết quả ta phải phân tích như sau:  $\sqrt[n]{u(x)} - \sqrt[m]{v(x)} = (\sqrt[n]{u(x)} - m(x)) - (\sqrt[m]{v(x)} - m(x))$ , trong đó  $m(x) \rightarrow c$ .

\* Một đẳng thức cần lưu ý:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

2.

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

**Lời giải.**

$$1. \text{ Ta có: } x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$\text{Suy ra: } \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

$$\text{Do đó: } A = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = n.$$

$$2. \text{ Ta có: } x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4 = (x - 1)^2(x + 2)(x^2 - 2)$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$$

$$\text{Do đó: } B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x^2 - 2)}{x + 1} = -\frac{3}{2}.$$

**Ví dụ 2.** Tìm các giới hạn sau:

$$1. C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}$$

$$2. D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^2(1 + 3x)^3 - 1}{x}$$

**Lời giải.**

$$1. \text{ Ta có: } (1 + mx)^n = 1 + mnx + \frac{m^2 n(n-1)x^2}{2} + m^3 x^3 \cdot A$$

$$\text{Với } A = C_n^3 + mx C_n^4 + \dots + (mx)^{n-3} C_n^n$$

$$(1 + nx)^m = 1 + mnx + \frac{n^2 m(m-1)x^2}{2} + n^3 x^3 B$$

$$\text{Với } B = C_m^3 + nx C_m^4 + \dots + (nx)^{m-3} C_m^m$$

$$\text{Do đó: } C = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{m^2 n(n-1) - n^2 m(m-1)}{2} + x(m^3 A - n^3 B) \right]$$

$$= \frac{m^2 n(n-1) - n^2 m(m-1)}{2} = \frac{mn(n-m)}{2}.$$

$$2. \text{ Ta có: } \frac{(1 + 2x)^2(1 + 3x)^3 - 1}{x} = \frac{(1 + 2x^2) \left[ (1 + 3x)^3 - 1 \right]}{x} +$$

$$+ \frac{(1 + 2x)^2 - 1}{x} = (1 + 2x)^2 (9 + 27x + 27x^2) - (4 + 4x)$$



Suy ra:  $D = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + 2x)^2 (9 + 27x + 27x^2) - (4 + 4x) \right] = 5$

**Ví dụ 3.** Tìm các giới hạn sau:

1.  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1}$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - x}{\sqrt{3x-2} - 2}$

**Lời giải.**

1. Ta có:  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1-x^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-1}+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x+1)(\sqrt{2x-1}+x)} = 0$

2. Ta có:  $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x+2-x^3)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x^2+2x+1)(\sqrt{3x-2}+2)}{3(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4)} = -1$

**Ví dụ 4.** Tìm các giới hạn sau:

1.  $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1}$

2.  $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-2} \cdot \sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1}$

**Lời giải.**

1. Đặt  $t = x - 1$  ta có:  $B = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2t+1} - 1}{t} = \frac{2}{3}$

2. Ta có:  $\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-2} \cdot \sqrt[4]{4x-3} - 1 = \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-2} (\sqrt[4]{4x-3} - 1) + \sqrt{2x-1} (\sqrt[3]{3x-2} - 1) + \sqrt{2x-1} - 1$

Mà:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x-2} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{4x-3} - 1}{x-1} = 1$

Nên ta có:  $C = 1 + 1 + 1 = 3$ .

**Ví dụ 5.** Tìm các giới hạn sau:

1.  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} - \sqrt{5x-1}}{x-1}$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt{x+9} - 2}$

**Lời giải.**

1. Ta có:  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} - 2 - (\sqrt{5x-1} - 2)}{x-1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} - 2}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1} - 2}{x-1} = I - J$

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 2\sqrt[3]{7x-1} + 4)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{7}{\sqrt[3]{(7x-1)^2} + 2\sqrt[3]{7x-1} + 4} = \frac{7}{12}.$$

$$J = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{(x-1)(\sqrt{5x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{\sqrt{5x-1} + 1} = \frac{5}{3}$$

Vậy  $A = -\frac{2}{3}$ .

2. Ta có:  $B = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} - \frac{\sqrt[3]{x+20} - 3}{x-7}}{\frac{\sqrt[4]{x+9} - 2}{x-7}}$

Mà:  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x-7} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 3} = \frac{1}{6}$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{x+20} - 3}{x-7} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+20})^2 + 3\sqrt[3]{x+20} + 9} = \frac{1}{27}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[4]{x+9} - 2}{x-7} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(\sqrt[4]{x+9})^3 + 2(\sqrt[4]{x+9})^2 + 4\sqrt[4]{x+9} + 8} = \frac{1}{32}.$$

Vậy  $B = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{27}}{\frac{1}{32}} = \frac{112}{27}$ .

## CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

**Bài 1** Tìm các giới hạn sau :

1.  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 4x + 3}$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8}$

3.  $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^3 - (1-4x)^4}{x}$

4.  $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}$

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau :

1.  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$  ( $m, n \in \mathbb{N}^*$ )

2.  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{x}$  ( $n \in \mathbb{N}^*, a \neq 0$ )

3.  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - 1}{\sqrt[m]{1+bx} - 1}$  với  $ab \neq 0$

4.  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\alpha x} \sqrt[3]{1+\beta x} \sqrt[4]{1+\gamma x} - 1}{x}$

với  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ .

**Bài 3** Tìm các giới hạn sau :

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x - 2}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^3 + 2x - 3}$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - x}{x^2 - 4x + 3}$$

$$4. D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{2x+1} - 1}$$

$$5. E = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{4x-1} - \sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2} - 2}$$

$$6. F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x}$$

$$7. M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$$

$$8. N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$$

$$9. G = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}$$

$$10. V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$$

$$11. K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

$$12. L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$$

**Bài 4** Tìm các giới hạn sau :

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 - 8}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3}$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$4. D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{2x+1} - 1}$$

$$5. E = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt[3]{4x-1} - \sqrt{x+2}}{\sqrt[4]{2x+2} - 2}$$

$$6. F = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2x+1)(3x+1)(4x+1)} - 1}{x}$$

$$7. M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{1 - \cos 3x}$$

$$8. N = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$9. V = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}$$

$$10. K = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x^2)^{n-1}}$$

**Bài 5** Tìm các giới hạn sau

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{x}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{\sqrt[3]{5x+3} - 2}$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[4]{2x+3} + \sqrt[3]{2+3x}}{\sqrt{x+2} - 1}$$

$$4. D = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x - \sqrt[3]{3x+2}}$$



**Bài 6** Tìm các giới hạn sau

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+4x} - \sqrt[3]{7+6x}}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

**Bài toán 03:** Tìm  $B = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ , trong đó  $f(x), g(x) \rightarrow \infty$ , dạng này ta còn gọi

là dạng vô định  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Phương pháp:** Tương tự như cách khử dạng vô định ở dãy số. Ta cần tìm cách đưa về các giới hạn:

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} x^{2k} = +\infty \quad ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} x^{2k+1} = +\infty \quad (-\infty).$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{k}{x^n} = 0 \quad (n > 0; k \neq 0).$$

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (-\infty) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k}{f(x)} = 0 \quad (k \neq 0).$$

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x+1)^3 (2x+1)^4}{(3+2x)^7}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 4} + 3x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

**Lời giải.**

$$1. \text{ Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(4 + \frac{1}{x}\right)^3 \left(2 + \frac{1}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x} + 2\right)^7} = 8$$

$$2. \text{ Ta có: } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + 3}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

**Ví dụ 2.** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{2x + 2}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

**Lời giải.**

$$1. \text{ Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$2. \text{ Ta có: } B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{3-\frac{2}{x^2}} + |x|\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{3-\frac{2}{x^2}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{|x|}\right)} = \sqrt{3}$$

### CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

**Bài 1** Tìm các giới hạn sau:

$$1. C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{3x^2 + 2}}{5x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2. D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}$$

$$3. E = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$$

$$4. F = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2 + 1} - x)$$

$$5. M = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$$

$$6. N = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x} - 2x)$$

$$7. H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[4]{16x^4 + 3x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2} \right)$$

$$7. K = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x} - 2x \right)$$

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x + 1}{2x^2 + x + 1}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + \dots + b_{m-1}x + b_m} \quad (a_0b_0 \neq 0).$$

**Bài 3** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3 + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1}}{\sqrt[4]{4x^4 + 2}}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1}{\sqrt[3]{2x^3 - 2} + 1}.$$

**Bài 4** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+1)^3(x+2)^4}{(3-2x)^7}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 4} - 2x}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{3x^2 + 2}}{5x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$4. D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^4+x^6}}{\sqrt{1+x^3+x^4}}.$$

**Bài 5** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{2x^3 + x - 1} \right) \quad 2. B = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \sqrt{x^2 + x + 1} \right)$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x \right) \quad 4.$$

$$D = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right).$$

**Bài 6** Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + x} \right)$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x + x})$$

**Bài 7** Tìm các giới hạn sau

$$1. A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0 x^n + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + \dots + b_{m-1} x + b_m}, (a_0 b_0 \neq 0)$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x} + \sqrt[3]{8x^3 + x - 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 3}}$$

$$3. C = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2} + \sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

$$4. D = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 1} + 2x + 1}{\sqrt[3]{2x^3 + x + 1} + x}$$

**Bài toán 04: Dạng vô định:**  $\infty - \infty$  và  $0 \cdot \infty$

**Phương pháp:**

Những dạng vô định này ta tìm cách biến đổi đưa về dạng  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Các ví dụ**

**Ví dụ 1.** Tìm các giới hạn sau:  $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + \sqrt{x^2 - 2x})$

**Lời giải.**

$$\text{Ta có: } \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + \sqrt{x^2 - 2x} = (\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x) + (\sqrt{x^2 - 2x} + x)$$

$$= \frac{-3x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} + x^2} + \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} - x}$$

$$\Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} + 1} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{-\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - 1} = 0.$$

**Ví dụ 2.** Tìm giới hạn sau:  $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x + x})$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x = \frac{2x^2 + 2x + 2x\sqrt{x^2 + 2x} - 4x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 + 2x} + 2\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= 2x \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x} + 2\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$= \frac{-2x}{(\sqrt{x^2 + 2x} + 2\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1)}$$

$$\Rightarrow B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2 + 2x} + 2\sqrt{x^2 + x} + x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1)}$$

$$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{4}$$

### CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Tìm các giới hạn sau:

1.  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - x + 1})$

3.  $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x]$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau:

1.  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{4x^2 + 1} - x)$

3.  $C = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})$

4.  $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x} - 2x)$

5.  $E = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{16x^4 + 3x + 1} - \sqrt{4x^2 + 2})$

6.  $F = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt[3]{1 - x^3})$

### Bài toán 05: Dạng vô định các hàm lượng giác

Phương pháp:

Ta sử dụng các công thức lượng giác biến đổi về các dạng sau:

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ , từ đây suy ra  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$ .

• Nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$  và  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tan u(x)}{u(x)} = 1$ .

Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \sqrt{\cos 2x}}$$

Lời giải.

$$1. \text{ Ta có: } A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$\text{Mà: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x} + 1} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos x} + 1} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Do đó: } A = -\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}.$$

$$2. \text{ Ta có: } B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{1 - \sqrt{\cos 2x}} \cdot \frac{x^2}{x^2}$$

$$\text{Mà: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1+2x} + x + 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 3}{(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{(1+3x)^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos 2x}} = 1$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

$$1. A = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x^2}$$

$$2. B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 \sin x + \cos^3 x)(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

Lời giải.

$$1. \text{ Ta có: } 0 \leq \left| x^3 \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq x^3$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| x^3 \sin \frac{1}{x^2} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{Vậy } A = 0.$$

2. Ta có:  $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sin x + \cos^3 x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

Mà:  $0 \leq \left| \frac{2\sin x + \cos^2 x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \rightarrow 0$  khi  $x \rightarrow +\infty$ .

Do đó:  $B = 0$ .

### CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

**Bài 1** Tìm giới hạn sau:  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2}$

**Bài 2** Tìm các giới hạn sau:

1.  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin mx - \cos mx}{1 + \sin nx - \cos nx}$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}{x^2}$ .

**Bài 3** Tìm các giới hạn sau:

1.  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin \frac{3x}{2}}$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x(\sin 3x - \sin 4x)}$

3.  $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x}{1 - \sqrt[3]{\cos 2x}}$

4.  $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin 3x} - \cos 2x}$

**Bài 4** Tìm các giới hạn sau:

1.  $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x^m)}{\sin(\pi x^n)}$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$

3.  $C = \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \sin \frac{1}{x}$  ( $\alpha > 0$ )

4.  $D = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

**Bài 5.** Tìm các giới hạn sau

1.  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 4x}{\cos 5x - \cos 6x}$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 + 2 \sin 2x}}{\sin 3x}$

3.  $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[4]{\cos x}}$

4.  $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$

5.  $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\tan x)}$

6.  $F = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

7.  $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos ax} - \sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$

8.  $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos ax}}{x^2}$ .

**Bài 6.** Tìm các giới hạn sau



1.  $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 4x}{\cos 5x - \cos 6x}$

3.  $C = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[4]{\cos x}}$

5.  $E = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin(\tan x)}$

7.  $H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos ax} - \sqrt[m]{\cos bx}}{\sin^2 x}$

2.  $B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 + 2 \sin 2x}}{\sin 3x}$

4.  $D = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 2x}{\sin^4 3x}$

6.  $F = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

8.  $M = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{1 - \cos 2x}$