DẠNG 2: Viết phương trình đường tròn

1. Phương pháp giải.

Cách 1: + Tìm toạ độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C)

+ Tìm bán kính R của đường tròn (C)

+ Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Cách 2: Giả sử phương trình đường tròn (C) là:

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (Hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$).

+ Từ điều kiện của đề bài thành lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c.

+ Giải hệ để tìm a, b, c từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Chú ý:

* $A\in(C)\Leftrightarrow IA=R$

* (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A\Leftrightarrow IA=d(I;\Delta)=R$

* (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2\Leftrightarrow d(I;\Delta_1)=d(I;\Delta_2)=R$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1 : Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận AB làm đường kính với $A(1;1)$, $B(7;5)$.

c) Đi qua ba điểm: $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$

Lời giải:

a) Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ nên có phương trình là $(x-1)^2+(y+5)^2=26$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AB suy ra $I(4;3)$

$AI=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính $R=AI=\sqrt{13}$ nên có phương trình là

$(x-4)^2+(y-3)^2=13$

c) Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là:

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm M, N, P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4+16+4a-8b+c=0 \\ 25+25-10a-10b+c=0 \\ 36+4-12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

Nhận xét: Đối với ý c) ta có thể làm theo cách sau

Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm

Vì $IM=IN=IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2=IN^2 \\ IM^2=IP^2 \end{cases}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-5)^2 \\ (x+2)^2+(y-4)^2=(x-6)^2+(y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$

b) (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox và Oy

c) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$

Lời giải:

a) Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên $R=d(I;\Delta)=\dfrac{|-1-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Vậy phương trình đường tròn (C) là : $(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{5}$

b) Vì điểm A nằm ở góc phần tư thứ tư và đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ nên tâm của đường tròn có dạng $I(R;-R)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C).

Ta có:

$$R^2=IA^2 \Leftrightarrow R^2=(2-R)^2+(-1+R)^2 \Leftrightarrow R^2-6R+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R=1 \\ R=5 \end{array}\right.$$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đầu bài là: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ và

$(x-5)^2+(y+5)^2=25$

c) Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi

$K(6a+10;a)$

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{\left|3(6a+10)+4a+5\right|}{5}=\frac{\left|4(6a+10)-3a-5\right|}{5}\Leftrightarrow$$

$$\left|22a+35\right|=\left|21a+35\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\dfrac{-70}{43}\end{array}\right.$$

- Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C):(x-10)^2+y^2=49$

- Với $a=\dfrac{-70}{43}$ thì $K\left(\dfrac{10}{43};\dfrac{-70}{43}\right)$ và $R=\dfrac{7}{43}$ suy ra

$$(C):\left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$(C):(x-10)^2+y^2=49$ và $(C):\left(x-\dfrac{10}{43}\right)^2+\left(y+\dfrac{70}{43}\right)^2=\left(\dfrac{7}{43}\right)^2$

Ví dụ 3: Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Lời giải:

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và Bán kính

$R=IA=\sqrt{(8-4)^2+(0-3)^2}=5$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là:

$(x-4)^2+(y-3)^2=25$

b) Ta có $OA=8;\ OB=6;\ AB=\sqrt{8^2+6^2}=10$

Mặt khác $\frac{1}{2}OA.OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC)

Suy ra $r = \dfrac{OA.OB}{OA+OB+AB} = 2$

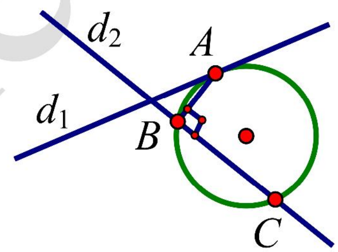
Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên

tâm của đường tròn có tọa độ là $\ 2;2$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là:

$\ x-2\ ^2 + \ y-2\ ^2 = 4$

Ví dụ 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1 : \sqrt{3}x + y = 0$. và $d_2 : \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.



Hình 3.1

Lời giải (hình 3.1)

Vì $A \in d_1 \Rightarrow A\ \ a;-\sqrt{3}a\ \ , a > 0;\ B, C \in d_2 \Rightarrow B\ \ b;\sqrt{3}b\ \ , C\ \ c;\sqrt{3}c$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\ \ b-a;\sqrt{3}\ \ a+b\ \ , \overrightarrow{AC}\ \ c-a;\sqrt{3}\ \ c+a$

Tam giác ABC vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn C.

Do đó $AC \perp d_1 \Rightarrow$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow -1.\ \ c-a\ \ + \sqrt{3}.\sqrt{3}\ \ a+c\ \ = 0 \Leftrightarrow 2a + c = 0\ (1)$

$AB \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow 1.\ \ b-a\ \ + 3\ \ a+b\ \ = 0 \Leftrightarrow 2b + a = 0$ (2)

Mặt khác

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}d\ \ A;d_2\ \ .BC \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{\left|2\sqrt{3}a\right|}{2}\sqrt{\ c-b\ ^2 + 3\ c-b\ ^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Leftrightarrow 2a\left|c-b\right| = 1\,(3)$

Từ (1), (2) suy ra $2\ \ c-b\ \ = -3a$ thế vào (3) ta được

$a\left|-3a\right| = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó $b=-\frac{\sqrt{3}}{6}, c=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1\right), C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-2\right)$

Suy ra (C) nhận $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AC làm tâm và bán kính là

$R=\frac{AC}{2}=1$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$C\ :\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 3.75.Viết phương trình đường tròn (C) biết

a) (C) có đường kính AB với $A(1;-1)$ và $B(3;3)$.

b) (C) ngoại tiếp ΔABC với $A(4;4), B(1;-5)$ và $C(-3;3)$.

c) (C) có tâm $I(1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x-4y+7=0$.

Bài 3.76: (ĐH 2007A) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A\ \ 0;2\ \ $,

$B\ \ -2;-2\ \ $ và $C\ \ 4;-2\ \ $. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

Bài 3.77: Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC, hai cạnh AB, AC theo thứ tự có phương trình $x+y-2=0$ và $2x+6y-3=0$. Cạnh BC có trung điểm $M\ \ -1;1\ \ $.

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3.78: Viết phương trình đường tròn (C) trong trường hợp sau:

a) Đi qua $A(-4;2)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ.

b) Có tâm nằm trên đường thẳng $x=5$ và tiếp xúc với hai đường thẳng: $d_1 : 3x-y+3=0, d_2 : x-3y+9=0$.

Bài 3.79: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$ và hai đường thẳng

$\Delta_1 : x-y=0, \Delta_2 : x-7y=0$. Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc (C).

Bài 3.80: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm

$A\ \ 2;0\ \ ,\ B\ \ 6;4$

. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Bài 3.81: Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC tạo bởi ba đường thẳng $4x-3y-65=0,\ 7x-24y+55=0\ 3x+4y-5=0$.

Bài 3.82. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho 2 điểm

$A\ \ 0;5\ \ ,\ B\ \ 2;3\ \ .$

Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính $R=\sqrt{10}$.

Bài 3.83: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A\ \ -1;1$ và đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm A, gốc toạ độ O và tiếp xúc với đường thẳng d.

Bài 3.84: Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm $A\ \ -1;7\ \ ,\ B\ \ 4;-3$ và $C\ \ -4;1$. Hãy viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Bài 3.85: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $M\ \ 2;1$ và đường thẳng $\Delta: x-y+1=0$. Viết phương trình đường tròn đi qua M cắt Δ ở 2 điểm A, B phân biệt sao cho ΔMAB vuông tại M và có diện tích bằng 2.

$(x-1)^2+(y-2)^2=2$