Bài toán 02: DỰNG THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI ĐƯỜNG THẲNG.

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa và các tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Trong phần này ta sẽ xét thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua một điểm song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng; để xác định thiết diện loại này ta sử dụng tính chất:

$$\begin{cases}(\alpha)//d\\ d\subset(\beta)\\ M\in(\alpha)\cap(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=d'//d, M\in d'$$

Các ví dụ

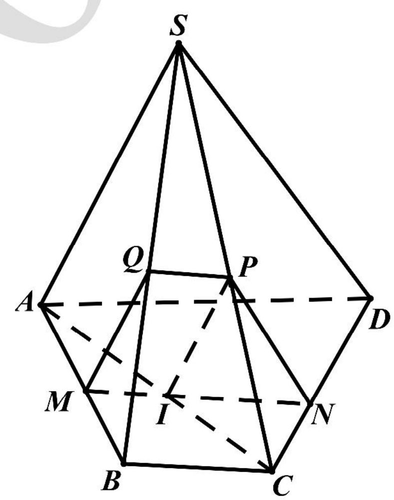
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, M và N là hai điểm thuộc cạnh AB và CD, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi (α).

b) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là một hình thang.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(SAB)\\ (\alpha)//SA\\ SA\subset(SAB)\end{cases}$



$\Rightarrow(SAB)\cap(\alpha)=MQ//SA, Q\in SB$.

Trong $(ABCD)$ gọi $I=AC\cap MN$

$\begin{cases}I\in MN\subset(\alpha)\\ I\in AC\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow I\in(\alpha)\cap(SAC)$

Vậy $\begin{cases}I\in(SAC)\cap(\alpha)\\ (\alpha)//SA\\ SA\subset(SAC)\end{cases}$

$\Rightarrow(SAC)\cap(\alpha)=IP//SA, P\in SC$

Từ đó ta có $(\alpha)\cap(SBC)=PQ, (\alpha)\cap(SAD)=NP$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang khi $MN//PQ$ hoặc $MQ//NP$.

Trường hợp 1:

Nếu $MQ//NP$ thì ta có $\begin{cases}MQ//NP\\ MQ//SA\end{cases}\Rightarrow SA//NP$

Mà $NP\subset(SCD)\Rightarrow SA//(SCD)$ (vô lí).

Trường hợp 2:

Nếu $MN // PQ$ thì ta có các mặt phẳng $(ABCD),(\alpha),(SBC)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MN, BC, PQ nên $MN // BC$.

Đảo lại nếu $MN // BC$ thì $\begin{cases} MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ PQ = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow MN // PQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Vậy để tứ giác $MNPQ$ là hình thang thì điều kiện là $MN // BC$.

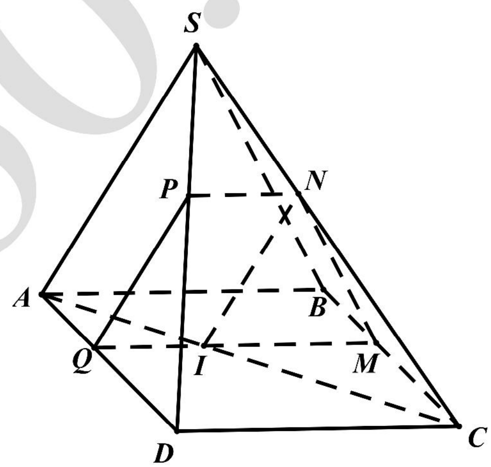
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh a và tam giác SAB đều. Một điểm M thuộc cạnh BC sao cho $BM = x$ $(0 < x < a)$, (α) mặt phẳng đi qua M song song với SA và SB.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SBC) \\ (\alpha) // SB \\ SB \subset (SBC) \end{cases}$



$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = MN // SB$, $N \in SC$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SAC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAC) \cap (\alpha) = NI // SA, I \in AC$

Trong $(ABCD)$ gọi $Q = MI \cap AD$, thì ta có

$\begin{cases} Q \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = QP // SA, P \in SD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Do $MN // SB \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CS}$ (1)

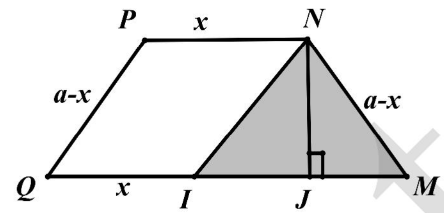
Lại có $IN // SA \Rightarrow \frac{CI}{CA} = \frac{CN}{CS}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\frac{CM}{CB} = \frac{CI}{CA} \Rightarrow IM // AB$

Mà $AB // CD \Rightarrow IM // CD$.

Ba mặt phẳng $(\alpha),(ABCD)$ và (SCD) đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến là MQ, CD, NP với $MQ // CD \Rightarrow MQ // NP$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang.

Ta có $\frac{MN}{SB}=\frac{CM}{CB}=\frac{DQ}{DA}=\frac{PQ}{SA}$, mà $SA=SB=a\Rightarrow MN=PQ$. Do đó $MNPQ$ là hình thang cân.



Từ $\frac{MN}{SA}=\frac{CM}{CB}=\frac{a-x}{a}\Rightarrow MN=a-x$,

$\frac{PN}{DC}=\frac{SN}{SC}=\frac{BM}{BC}\Rightarrow PN=BM=x$,

$\frac{IM}{AB}=\frac{CM}{CB}\Rightarrow IM=CM=a-x$

Gọi J là trung điểm của IM thì

$$NJ=\sqrt{MN^2-MJ^2}=\sqrt{\left(a-x\right)^2-\left(\frac{a-x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a-x\right)$$

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}NJ\left(MQ+NP\right)=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a-x\right)\left(a+x\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2-x^2\right).$$