Bài toán 02: THIẾT DIỆN ĐI QUA MỘT ĐIỂM VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG.

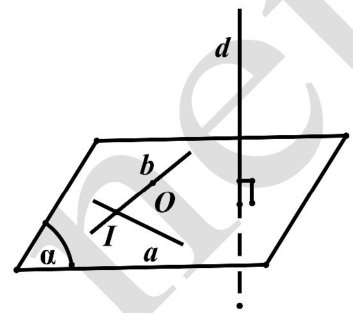
Phương pháp:

Để xác định thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng d với một hình chóp ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1. Tìm tất cả các đường thẳng vuông góc với d, khi đó (α) sẽ song song hoặc chứa các đường thẳng này và ta chuyển về dạng thiết diện song song như đã biết ở (dạng 2, §2 chương II).

Cách 2. Ta dựng mặt phẳng (α) như sau:

Dựng hai đường thẳng a, b cắt nhau cùng vuông góc với d trong đó có một đường thẳng đi qua O, khi đó (α) chính là mặt phẳng $mp(a,b)$.



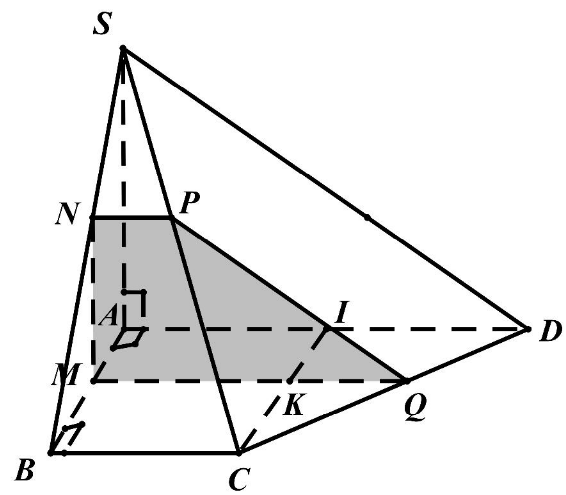
Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a, AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với AB. Đặt $AM = x\,(0 < x < a)$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a và x.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} B \notin (\alpha) \\ BC \perp AB \Rightarrow BC \,//\, (\alpha) \\ (\alpha) \perp AB \end{cases}$.

Tương tự $\begin{cases} A \notin (\alpha) \\ SA \perp AB \Rightarrow SA \,//\, (\alpha) \\ (\alpha) \perp AB \end{cases}$.

Do

$$\begin{cases} M \in (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MQ \,//\, BC, Q \in CD \\ BC \,//\, (\alpha) \end{cases}.$$

Tương tự $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ SA \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MN \,//\, SA, N \in SB$.

$\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ BC \,//\, (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = NP \,//\, BC, P \in SC$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

b) Ta có $\begin{cases} MQ \,//\, BC \\ NP \,//\, BC \end{cases} \Rightarrow MQ \,//\, NP$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Mặt khác $\begin{cases} MQ \,//\, AB \\ MN \,//\, SA \\ SA \perp AB \end{cases} \Rightarrow MQ \perp MN$ suy ra thiết diện là một hình thang vuông tại M và N.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP)MN$

Gọi I là trung điểm của AD và $K = CI \cap MQ$.

Do $MN \,//\, SA$ nên $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} \Rightarrow MN = \frac{BM.SA}{BA} = \frac{2a(a-x)}{a} = 2(a-x)$

$\frac{NP}{BC} = \frac{SN}{SB} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow NP = \frac{BC.AM}{AB} = \frac{a.x}{a} = x$.

Xét trong hình thang $ABCD$ ta có :

$\frac{KQ}{ID} = \frac{CK}{CI} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow KC = \frac{ID.BM}{BA} = \frac{a(a-x)}{a} = a - x$

$MQ = MK + KQ = a + (a - x) = 2a - x$.

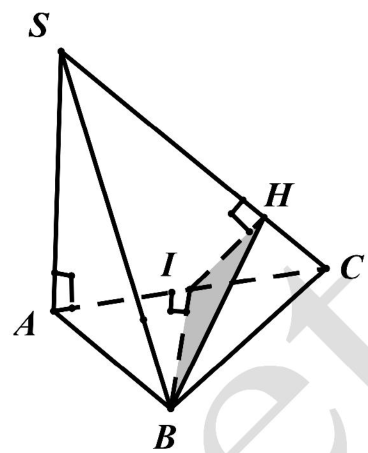
$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(2a - x + x)2(a-x) = 2a(a-x)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi (α).

b) Tính diện tích của thiết diện này.

Lời giải.



a) Gọi I là trung điểm của AC, dựng $IH \perp SC, H \in SC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC)$. Mặt khác $IH \perp SC$ nên $(BIH) \perp SC$. Vậy (BIH) chính là mặt phẳng (α) đi qua B và vuông góc với SC.

Thiết diện là tam giác IBH.

b) Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow IB \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I.

$BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao của tam giác đều cạnh a).

Hai tam giác CHI và CAS có góc C chung nên chúng đồng dạng. Từ đó suy ra

$$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI.SA}{CS} = \frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{\frac{a}{2}.2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{5\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $S_{BIH} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.